SLUČAJNI GRAFI

Vasko - Vasja GORGIEV

1 Lastnosti skoraj vseh grafov

Lastnost grafa je razred grafov, ki so zaprti z izomorfizmom, torej razred vsebuje z vsakim grafom G še vse njemu izomorfne grafe. Če je $p = p(n)$ fiksna funkcija (lahko konstantna) in je $\mathcal{P}$ lastnost grafa, nas zanima obnašanje verjetnosti $P[G \in \mathcal{P}]$ za $G \in \mathcal{G}(n,p)$, ko $n \to \infty$. Če gre verjetnost k 1, rečemo da $G \in \mathcal{P}$ za *skoraj vse* (skoraj vsak) $G \in \mathcal{G}(n,p)$; če gre proti 0 rečemo, da *skoraj noben* $G \in \mathcal{G}(n,p)$ nima lastnosti $\mathcal{P}$.

Za boljšo predstavo novega koncepta pokažimo, da je za določen p vsak fiksen graf H induciran podgraf na skoraj vseh grafih.

Trditev 1 *Za vsako konstanto $p \in (0,1)$ in vsak graf H, skoraj vsak $G \in \mathcal{G}(n,p)$ vsebuje inducirano kopijo H.*

Dokaz. Naj bo H dan in $k := |V(H)|$. Če $n \geq k$ in je $U \subseteq \{0,\ldots,n-1\}$ fiksna podmnožica na k vozliščih grafa G, potem je $G[U]$ izomorfen H z določeno verjetnostjo $r \geq 0$. Verjetnost r je odvisna od p, ne pa tudi od n (premisli zakaj ne?). G vsebuje $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ takih disjunktnih množic U_i za $i = 1,\ldots,\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$. Verjetnost, da noben izmed grafov $G[U_i]$ ni izomorfen H je $(1-r)^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}$, saj so ti dogodki med sabo neodvisni zaradi disjunktnsti povezav iz množice $[U]^2$. Zato je

$$P[H \underbrace{\not\subseteq}_{induciran} G] \leq (1-r)^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} \to 0, \qquad ko \quad n \to \infty$$

in trditev je dokazana.

$\square$

Za sklepanje o velikem številu naravnih lastnosti, ki jih imajo skoraj vsi grafi, je priročna naslednja lema. Za dana $i, j \in \mathbb{N}$ definirajmo lastnost grafa $\mathcal{P}_{i,j}$. Rečemo da je graf $G \in \mathcal{P}_{i,j}$ (oz. graf G ima lastnost $\mathcal{P}_{i,j}$), če za vsak par U, W disjunktnih množic vozlišč z $|U| \leq i$ in $|W| \leq j$, graf vsebuje vozlišče $v \notin U \cup W$, ki je sosedno z vsemi vozlišči iz U in hkrati z nobenim iz W.

Lema 2 *Za vsako konstanto $p \in (0,1)$ in $i, j \in \mathbb{N}$, skoraj vsak graf $G \in \mathcal{G}(n,p)$ ima lastnost $\mathcal{P}_{i,j}$.*

Dokaz. Za določena U, W in $v \in G - (U \cap W)$ je verjetnost, da je v sosed vsem vozliščem iz U ter nobenemu iz W

$$p^{|U|}q^{|W|} \geq p^i q^j$$

in zato je verjetnost, da ne obstaja ustrezen v za taka U in W

$$(1 - p^{|U|}q^{|W|})^{n-|U|-|W|} \leq (1 - p^i q^j)^{n-i-j}$$

(za $n \geq i + j$), saj so ustrezni dogodki med seboj neodvisni za različne v. Ker na vozliščih $V(G)$ ni več kot n^{i+j} parov takih množic U, W je verjetnost, da kak tak par nima ustrezenega vozlišča v največ

$$n^{i+j}(1 - p^i q^j)^{n-i-j},$$

to pa gre proti 0, ko $n \to \infty$, saj je $1 - p^i q^j < 1$. Še ocena zgornje meje različnih parov množic U, W v G:

$$\binom{n}{i}\binom{n-i}{j} = \frac{n!}{(n-i)!i!}\frac{(n-i)!}{(n-i-j)!j!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-(i+j)+1)}{i! \quad j!} \leq$$

$$\leq \underbrace{n(n-1)\cdots(n-(i+j)+1)}_{i+j} \leq n^{i+j}$$

□

Posledica 3 *Za vsak $p \in (0,1)$ in $k \in \mathbb{N}$ je skoraj vsak graf v $\mathcal{G}(n,p)$ k-povezan.*

Dokaz. Po lemi 2 ima skoraj vsak graf lastnost $\mathcal{P}_{2,k-1}$, zato je dovolj pokazat, da je vsak graf G z lastostjo $\mathcal{P}_{2,k-1}$ k-povezan. Poljuben graf v $\mathcal{P}_{2,k-1}$ je reda vsaj $k+2$. Če grafu G odstranimo manj kot k vozlišč mora biti povezan. Ta vozlišča damo v množico W, saj jo lahko poljubno izberemo in je moči manj kot k. Po definiciji $\mathcal{P}_{2,k-1}$ imata poljubni dve drugi vozlišči x, y, ki ju damo lahko v množico U, skupno sosednje vozlišče $v \notin W$. Zato W ne separira x in y. Graf G je res povezan.

□

V dokazu posledice 3 smo pokazali več kot je bilo potrebno. Namesto dokaza o obstoju poti med x in y, ki se izogne množici W, smo pokazali, da imata x in y skupnega soseda $v \notin W$. Zato so vse poti, ki so potrebne za vzpostavitev željene povezanosti, lahko dolžine 2.

Nadalje bomo pokazali, da ima skoraj vsak graf presenetljivo veliko kromatično število χ.

Trditev 4 *Za vsak $p \in (0,1)$ in vsak $\epsilon > 0$ ima skoraj vsak graf $G \in \mathcal{G}(n,p)$ kromatično število*

$$\chi(G) > \frac{\log(1/q)}{2+\epsilon} \cdot \frac{n}{\log(n)}$$

Dokaz. Za poljuben $n \geq k \geq 2$, z uporabo leme 11.1.2 (ni napisana) dobimo

$$P[\alpha \geq k] \leq \binom{n}{k} q^{\binom{k}{2}} \leq n^k q^{\binom{k}{2}} = q^{\log_q(n^k)} q^{\frac{1}{2}k(k-1)}$$

$$= q^{k\frac{\log(n)}{\log(q)} + \frac{1}{2}k(k-1)} = q^{\frac{k}{2}(-\frac{2\log(n)}{\log(1/q)} + k - 1)}$$

Za

$$k := (2+\epsilon)\frac{\log(n)}{\log(1/q)}$$

gre eksponent tega izraza z n proti neskončnosti, zato gre izraz proti 0. Torej nobena množica k vozlišč ne sme biti enako pobarvana, zato vsako barvanje vozlišč grafa G za skoraj vsak $G \in \mathcal{G}(n,p)$ uporablja več kot

$$\frac{n}{k} = \frac{\log(1/q)}{2+\epsilon} \cdot \frac{n}{\log(n)}$$

barv.

$\square$

Trditev 4 je močna v smislu obeh mej, saj če zamenjamo ϵ z $-\epsilon$, se spodnja meja za χ spremeni v zgornjo.

Kot zanimivost omenimo skupno lastnost rezultatov v tem poglavju: vrednost p ne igra nobene vloge, saj če je veljala določena lastnost za skoraj vsak graf v $\mathcal{G}(n, \frac{1}{2})$, je imel to lastnost tudi skoraj vsak graf v $\mathcal{G}(n, \frac{1}{1000})$. Kako je to mogoče?

Taka občutljivost modela slučajnih grafov na spremembe p niti ni bila mišljena. Konec koncev, izmed vseh grafov z določeno lastnostjo $\mathcal{P}$ so najbolj zanimivi prav tisti, ki imajo ravno še to lastnost $\mathcal{P}$. Ti grafi imajo tudi večjo verjetnost, da bodo vsebovali druge lastnosti - lastnosti, s katerimi bi lahko bila lastnost $\mathcal{P}$ v sorodu (lep primer je dokaz *Erdösovega* izreka). Za večino primerov (zgornji primer je izjema) se nahaja kritična velikost magnitude p, okoli katere se lastnot ravno še bo oz. ne bo pojavila, veliko nižje od vsake konstante vrednosti p. Največkrat je funkcija n-ja, ki gre proti 0, ko $n \to \infty$.

Poglejmo si, kaj se dogaja, če je $p = p(n)$. V tem primeru se nam razkrije fascinantna slika. Za verjetnost povezav p, ki imajo red manjši od n^{-2}, skoraj gotovo slučajni graf $G \in \mathcal{G}(n,p)$ nima nobene povezave. Ko p raste, G pridobiva vedno več strukturiranosti. Nad mejo okoli $p = \sqrt{n}\, n^{-2}$ ima skoraj gotovo komponento z več kot dvemi vozliči, te komponente z večanjem reda rastejo in okoli $p = n^{-1}$ se pojavijo prvi cikli. Kmalu zatem postane graf neravninski, hkrati ena konponenta nadvlada ostale, vse dokler ne postane pri meji okoli $p = (\log n)n^{-1}$ graf povezan. Ne veliko za tem, pri $p = (1 + \epsilon)(\log n)n^{-1}$, ima graf skoraj gotovo Hamiltonov cikel.

Velikokrat se ta razvoj slučajnih grafov, ko p raste, primerja z evolucijo organizmov. Za vsak $p = p(n)$ si mislimo lastnosti skoraj vseh grafov v $\mathcal{G}(n,p)$ kot lastnosti tipičnega slučajnega grafa $G \in \mathcal{G}(n,p)$ in preučujmo, kako se s stopnjo rasti p spreminjajo lastnosti grafa G. Kot pri vrstah, se tudi evolucija slučajnih grafov zgodi v relativno nendadnih skokih. Kot že prej omenjene kritične meje verjetnosti so pragovi, pod katerimi skoraj noben graf nima in nad katerimi skoraj vsi grafi imajo mišljene lastnosti. Bolj natančno, realna funkcija $t = t(n) \neq 0$ za vse n je *pragovna funkcija* za grafovsko lastnost $\mathcal{P}$, če za vse $p = p(n)$ in $G \in \mathcal{G}(n,p)$ velja:

$$\lim_{n\to\infty} P[G \in \mathcal{P}] = \begin{cases} 0 & \text{če } p/t \to 0 \text{ ko } n \to \infty \\ 1 & \text{če } p/t \to \infty \text{ ko } n \to \infty \end{cases}$$

Če ima $\mathcal{P}$ pragovno funkcijo t, je očitno vsak pozitivni večkratnik $c\,t$ funkcije t tudi pragovna funkcija za $\mathcal{P}$. Zato so pragovne funckije v zgornjem smislu enolično določene do multiplikativne konstante. V naslednjem poglavju se bomo lotili splošne metode za izračun pragovnih funkcij.

2 Pragovne funkcije in drugi momenti

Naj bo lastnost grafa množica

$$\mathcal{P} = \{G \,|\, X(G) > 0\}\,,$$

kjer je $X \geq 0$ slučajna spremenljivka na $\mathcal{G}(n,p)$. Z množico $\mathcal{P}$ lahko na ta način izrazimo neštevne lastnosti. Npr. če X označuje število vpetih dreves, potem $\mathcal{P}$ ustreza povezanosti.

Dokaz, da ima $\mathcal{P}$ pragovno funkcijo t, je sestavljen iz dveh delov:

1. dokaza, da skoraj noben graf $G \in \mathcal{G}(n,p)$ nima lastnosti $\mathcal{P}$, ko je p majhna v primerjavi s t

2. dokaza, da skoraj vsak graf $G \in \mathcal{G}(n,p)$ ima lastnost $\mathcal{P}$ ko je p velik v primerjavi s t

Če je X slučajna spremenljivka z zalogo vrednosti v $\mathbb{N} \cup \{0\}$, lahko uporabimo Markovo neenakost ($P[X \geq a] \leq \frac{E(X)}{a}$) za prvi del dokaza in namesto $P[X > 0]$ najdemo zgornjo mejo za $E(X)$. V primeru, da je matematično upanje $E(X)$ majhno, je lahko $X(G)$ pozitivno (in zato vsaj 1) samo za nekaj grafov $G \in \mathcal{G}(n,p)$. Poleg vsega je matematično upanje lažje izračunati kot verjetnosti. Matematično upanje vsote slučajnih spremenljivk (npr. vsoto slučajnih indikatorskih spremenljivk) je kar vsota upanj posamezne slučajne slučajne spremenljivke, ne da bi pri tem morali skrbeli za neodvisnot dogodkov.

Drugi del dokaza je bolj zapleten. Za dokaz velike verjetnosti $P[X > 0]$ ne zadostuje omejiti $E(X)$ samo navzdol, saj je ta lahko omejen, pa je verjetnost kljub temu majhna. Recimo lahko se zgodi, da je $X(G) = 0$ na večini grafov $G \in \mathcal{G}(n,p)$, na nekaj ostalih pa je X zelo velik in posledično veliko tudi matematično upanje $E(X)$. Zato bo za dokaz konvergence $P[X > 0] \to 1$ bolj pomembno, da X ne niha veliko in prepogosto okoli pričakovane vrednosti. Pišimo matematično upanje slučajne spremenljivke X

$$\mu := E(X)$$

in definirajmo varianco oziroma drugi moment slučajne spremenljivke X

$$\sigma^2 := \mathrm{var}(X) = E((X - E(X))^2) = E((X - \mu)^2)\,, \quad \sigma \geq 0$$

Varianca nam meri odstopanje X-a okoli matematičnega upanja $E(X)$. Ker je E linearen, velja:

$$\sigma^2 = E((X^2 - 2\mu X + \mu^2) = E(X^2) - \mu^2$$

Ne smemo pozabiti, da se μ in σ^2 vedno nanašata na neko slučajno spremenljivko v določenem verjetnostnem prostoru $\mathcal{G}(n,p)$, zato sta obe vrednosti odvisni od n.

Naslednja lema nam pove, da X ne more prepogosto veliko nihati okoli matematičnega upanja.

Lema 5 (Chebysheva neenakost) *Za vsa realna števila $\lambda > 0$, velja*

$$P[|X - \mu| \geq \lambda] \leq \frac{\sigma^2}{\lambda^2}$$

Dokaz. Uporabimo neenakost Markova za slučajno spremenljivko $Y = (X - \mu)^2$, $\mu = E(X)$

$$P[|X - \mu| \geq \lambda] = P[(X - \mu)^2 \geq \lambda^2] \quad \underbrace{\leq}_{neenakost \quad Markova} \quad \frac{E[(X - \mu)^2]}{\lambda^2} = \frac{\sigma^2}{\lambda^2}$$

□

Lema 6 *Če $\mu > 0$ za velike n in $\frac{\sigma^2}{\mu^2} \to 0$, ko $n \to \infty$, potem je $X(G) > 0$ za skoraj vse $G \in \mathcal{G}(n, p)$.*

Dokaz. Če je $X(G) = 0$, potem izpolnjuje tudi $|X(G) - \mu| \geq \mu$. Uporabimo še neenakost Chebysheva ter $\lambda := \mu$ in dobimo

$$P[X = 0] \leq P[|X(G) - \mu| \geq \mu] \leq \frac{\sigma^2}{\mu^2} \to 0 \text{ , ko } n \to \infty$$

Pogledamo začetek in konec izraza in ker je $X(G) \geq 0$, je $X(G) > 0$ skoraj gotovo, z drugimi besedami $X(G) > 0$ za skoraj vse $G \in \mathcal{G}(n, p)$.

□

Sedaj bomo kot bistven rezultat tega poglavja dokazali izrek, ki nam bo naenkrat dal pragovne funkcije za številne naravne lastnosti. Naj bo dan graf H. Označimo s $\mathcal{P}_H$ grafovsko lastnost, da grafi G s to lastnostjo vsebujejo H kot izomorfen podgraf. Spomnimo $\epsilon(H) := \frac{|E(H)|}{|V(H)|}$(nekakšna gostota povezav). Potem je H *uravnotežen*, če $\epsilon(H') \leq \epsilon(H)$ za vse podgrafe H' grafa H.

Izrek 7 *Če je H uravnotežen graf s k vozlišči in $l \geq 1$ povezavami, potem je $t(n) := n^{-\frac{k}{l}}$ pragovna funkcija za $\mathcal{P}_H$.*

Dokaz. Z $X(G)$ označimo število podgrafov G izomorfnih H. Za $n \in \mathbb{N}$ označimo s $\mathcal{H}$ množico vseh grafov izomorfnih grafu H, katerih vozlišča ležijo v množici $\{0, \dots, n-1\}$ vozlišč grafov $G \in \mathcal{G}(n, p)$.

$$X(G) = X(G, H) := |\{U \mid U \subseteq G, U \simeq H\}|$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(n, H) := \{H' \mid H' \simeq H, V(H') \subseteq \{0, \dots, n-1\}\}$$

Za $H' \in \mathcal{H}$ in $G \in \mathcal{G}(n, p)$ pišemo $H' \subseteq G$, ko hočemo poudariti, da je H' (in ne samo njegova izomorfna kopija) podgraf G.

S h označimo število izomorfnih kopij H na fiksni k-množici. Neenakost $h \leq k!$ velja vedno. Ker imamo $\binom{n}{k}$ možnih množic k vozlišč za grafe iz $\mathcal{H}$, velja

$$|\mathcal{H}| = \binom{n}{k} h \leq \binom{n}{k} k! = \underbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}_{k \text{ členov}} \leq n^k \tag{1}$$

Za dano $p = p(n)$, postavimo $\gamma(n) := \frac{p(n)}{t(n)}$. Potem

$$p = \gamma n^{-\frac{k}{l}} \quad . \tag{2}$$

Dokazujemo, da je $t = n^{-\frac{k}{l}}$ pragovna funkcija, torej dve stvari

1. Če $\gamma \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ skoraj noben $G \in \mathcal{G}(n, p)$ ne leži v $\mathcal{P}_H$ (tj. $P[G \in \mathcal{P}_H] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$)
2. Če $\gamma \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ skoraj vsi $G \in \mathcal{G}(n, p)$ ležijo v $\mathcal{P}_H$ (tj. $P[G \in \mathcal{P}_H] \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$)

Vemo:

$$P[G \in \mathcal{P}_H] = P[X > 0] = P[X \geq 1] \leq \frac{E(X)}{1} \tag{3}$$

Za dokaz prvega dela poiščemo zgornjo mejo za $E(X)$. X je število podgrafov G izomorfnih H, to zapišemo z indikatorskimi spremenljivkami. Naj bo

$$X_{H'}(G) = \begin{cases} 0 & \text{če } H' \nsubseteq G \\ 1 & \text{če } H' \subseteq G \end{cases}$$

potem

$$X = \sum_{H' \simeq H} X_{H'} \quad \Rightarrow \quad E(X) = \sum_{H' \simeq H} E(X_{H'}) \tag{4}$$

Za vsak fiksen $H' \in \mathcal{H}$, $\|H\| = l$ velja

$$P[H' \subseteq G] = p^l \tag{5}$$

in zato

$$E(X_{H'}) = 0 \cdot P[X_{H'} = 0] + 1 \cdot P[X_{H'} = 1] = P[X_{H'} = 1]$$

$$= P[X_{H'}^{-1}(\{1\})] = P[\{G | H' \subseteq G\}] = P[H' \subseteq G] = p^l \tag{6}$$

Sledi

$$E(X) \overset{(4),(6)}{=} \sum_{H' \simeq H} P[H' \subseteq G\}] \overset{(5)}{=} p^l |\mathcal{H}| \overset{(1),(2)}{\leq} (\gamma n^{-\frac{k}{l}})^l n^k = \gamma^l \tag{7}$$

Torej če $\gamma \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} 0$, uporabimo (3) in (7)

$$P[G \in \mathcal{P}_H] = P[X \geq 1] \leq E(X) \leq \gamma^l \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} 0 \tag{8}$$

kar pomeni ravno to, da skoraj noben $G \in \mathcal{G}(n,p)$ ne leži v $\mathcal{P}_H$ in prvi del je dokazan.

Za drugi del moramo pokazati, da skoraj vsi $G \in \mathcal{G}(n,p)$ ležijo v $\mathcal{P}_H$ ($P[G \in \mathcal{P}_H] \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} 1$) če $\gamma \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \infty$. Opazimo za $n \geq k$

$$\binom{n}{k} n^{-k} = \frac{1}{k!}\Big(\underbrace{\frac{n}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n}}_{k \text{ členov}}\Big) \geq \frac{1}{k!}\Big(\frac{n-k+1}{n}\Big)^k =$$

$$\frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big)^k \geq \frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{k-1}{k}\Big)^k \tag{9}$$

da n^k ne presega $\binom{n}{k}$ več kot za faktor neodvisen od n. Naš cilj je uporabiti lemo 6 in navzgor omejiti $\frac{\sigma^2}{\mu^2} = \frac{E(X^2)-\mu^2}{\mu^2}$. Podobno kot pri (7) je

$$E(X^2) = \sum_{H', H'' \in \mathcal{H}} P[H' \cup H'' \subseteq G] \tag{10}$$

Za $H', H'' \in \mathcal{H}$ velja

$$P[H' \cup H'' \subseteq G] = P[\{G \,|\, H' \cup H'' \subseteq G\}] = p^{2l - \|H' \cup H''\|}$$

Ker je H uravnotežen, $\epsilon(H' \cap H'') \leq \epsilon(H) = \frac{l}{k}$. Če $|H' \cap H''| = i$, je $\|H' \cap H''\| \leq \frac{il}{k}$ in potem za $0 \leq p \leq 1$ velja

$$P[H' \cup H'' \subseteq G] \leq p^{2l - \frac{il}{k}} \tag{11}$$

Ocenili smo $P[H' \cup H'' \subseteq G]$ za posamezne sumande (10) pri parametru $i = |H' \cap H''|$, zato za celotno vsoto (10) nad $\mathcal{H}^2$ razdelimo v vsoto po podmnožicah

$$\mathcal{H}_i^2 = \{(H', H'') \in \mathcal{H}^2; |H' \cap H''| = i\}, \quad i = 0, \dots, k$$

ter izračunamo vsoto (10) glede na število skupih točk v preseku (glede na $\mathcal{H}_i^2$ po vseh i)

$$A_i := \sum_{(H',H'') \in \mathcal{H}_i^2} P[H' \cup H'' \subseteq G]$$

Ko je $i = 0$, sta H' in H'' disjunktna, zato sta dogodki $H' \subseteq G$ in $H'' \subseteq G$ neodvisna (če sta disjunktna po vozliščih, sta še toliko bolj po povezavah). Zato

$$A_0 = \sum_{(H',H'') \in \mathcal{H}_0^2} P[H' \cup H'' \subseteq G] = \sum_{(H',H'') \in \mathcal{H}_0^2} P[H' \subseteq G]\, P[H'' \subseteq G]$$

$$\leq \sum_{(H',H'') \in \mathcal{H}^2} P[H' \subseteq G]\, P[H'' \subseteq G] = \sum_{H' \in \mathcal{H}} P[H' \subseteq G] \sum_{H'' \in \mathcal{H}} P[H'' \subseteq G] = \mu^2 \tag{12}$$

Ocenimo še A_i za $i \geq 1$. Pri fiksnem H', poglejmo število možnih izborov H'', da je $|H' \cap H''| = i$. Med k vozlišči grafa H' izberemo i v preseku na $\binom{k}{i}$ možnih načinov, ostalih $k - i$ vozlišč izberemo na preostalih $n - k$ vozliščih, ki niso v H' na $\binom{n-k}{k-i}$ načinov, na izbranih k vozliščih pa imamo h izomorfnih kopij H'', torej skupaj

$$\binom{k}{i}\binom{n-k}{k-i} h \tag{13}$$

Za vse $i \geq 1$ in ustrezni konstanti c_1, c_2 neodvisni od n velja

$$A_i = \sum_{(H',H'') \in \mathcal{H}_i^2} P[H' \cup H'' \subseteq G] = \sum_{H' \in \mathcal{H}} \sum_{\substack{H'' \in \mathcal{H} \\ |H' \cap H''| = i}} P[H' \cup H'' \subseteq G]$$

$$\overset{(11),(13)}{\leq} \sum_{H' \in \mathcal{H}} \binom{k}{i}\binom{n-k}{k-i} h\, p^{2l} p^{-\frac{il}{k}} \overset{(2)}{=} |\mathcal{H}| \binom{k}{i}\binom{n-k}{k-i} h\, p^{2l} \left(\gamma\, n^{-\frac{k}{l}}\right)^{-\frac{il}{k}} =$$

$$= |\mathcal{H}| \binom{k}{i}\binom{n-k}{k-i} h\, p^{2l}\, \gamma^{-\frac{il}{k}}\, n^i \overset{(9*)}{\leq} |\mathcal{H}|\, p^l\, c_1(k)\, n^{k-i}\, h\, p^l\, \gamma^{-\frac{il}{k}}\, n^i =$$

$$\overset{(7)}{=} \mu\, c_1(k)\, n^k\, h\, p^l\, \gamma^{-\frac{il}{k}} \overset{(9*)}{\leq} \mu\, c_2(k) \binom{n}{k} h\, p^l\, \gamma^{-\frac{il}{k}} = \mu\, c_2(k) |\mathcal{H}|\, p^l\, \gamma^{-\frac{il}{k}}$$

$$\overset{(1)(7)}{=} \mu^2\, c_2(k)\, \gamma^{-\frac{il}{k}} \overset{(\text{če}\, \gamma \geq 1)}{\leq} \mu^2\, c_2(k)\, \gamma^{-\frac{l}{k}} \tag{14}$$

Naj bo $c_3 := kc_2$. V preseku $H' \cap H''$ je lahko največ k vozlišč, zato po definiciji A_i je $i \leq k$. Sledi

$$\frac{\sigma}{\mu} = \frac{E(X^2) - \mu^2}{\mu^2} = \frac{A_0 + \sum_{i=1}^{k} A_i - \mu^2}{\mu^2} \overset{(12)}{=} \frac{\sum_{i=1}^{k} A_i}{\mu^2}$$

$$\overset{(14)}{\leq} \frac{\sum_{i=1}^{k} \mu^2 c_2 \gamma^{-\frac{l}{k}}}{\mu^2} = c_3 \gamma^{-\frac{l}{k}} \underset{\gamma \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Po lemi (6) je $X \geq 0$ skoraj gotovo, kar pomeni, da imajo skoraj vsi $G \in \mathcal{G}(n, p)$ podgraf izomorfen H in zato ležijo v $\mathcal{P}_H$.

$\square$

Posledica 8 *Če je $k \geq 3$, je $t(n) := n^{-1}$ pragovna funkcija za $\mathcal{P}_{C_k}$.*

Kot zanimivost lahko opazimo, da je v posledici 8 pragovna funkcija neodvisna od dolžine cikla. V evoluciji grafov se vsi cikli konstantne dolžine pojavijo istočasno.

Podoben fenomen se pojavi pri drevesih. Pragovna funkcija je sicer odvisna od reda drevesa T, ne pa tudi od njegove oblike.

Posledica 9 *Če je T drevo reda $k \geq 2$, je $t(n) := n^{\frac{-k}{k-1}}$ pragovna funkcija za $\mathcal{P}_T$.*

Za konec omenimo še značilnost za polne grafe:

Posledica 10 *Če je $k \geq 2$, je $t(n) := n^{\frac{-2}{k-1}}$ pragovna funkcija za $\mathcal{P}_{K_k}$.*

Dokaz. Ker

$$\epsilon(K_i) = \frac{1}{2}(i-1) < \frac{1}{2}(k-1) = \epsilon(K_k) \text{ za } i < k$$

je K_k uravnotežen. Uporabimo izrek 7 za $l := \|K_k\| = \frac{1}{2}k(k-1)$, dobimo $n^{\frac{-k}{l}} = n^{\frac{-2}{k-1}}$.

$\square$

Dokaz izreka 7 se da prilagoditi za neuravnotežene grafe H. Pragovna funkcija postane v tem primeru

$$t(n) = n^{-\frac{1}{\epsilon'(H)}} ,$$

kjer je $\epsilon'(H) := \max\{\epsilon(F) \,|\, F \subseteq H\}$.

3 Klično število

V tem poglavju fiksirajmo $p = \frac{1}{2}$, saj ostale vrednosti p porodijo podobne rezultate. Označimo klično število z $\omega(G(n,p))$. Za fiksen $c > 0$ naj velja

$$\binom{n}{k} 2^{-\binom{n}{k}} \xrightarrow{n,k\to\infty} c$$

in aproksimirajmo

$$n \sim \frac{k}{e\sqrt{2}}\sqrt{2}^k , \qquad k \sim \frac{2\ln n}{\ln 2}.$$

Tukaj gre $\mu \to c$, zato $M \to e^{-c}$. Za ta k je $\Delta = o(E[X]^2)$ in zato $\Delta = o(1)$. Sledi

$$\lim_{n,k\to\infty} P[\omega(G(n,p)) < k] = e^{-c}$$

Naj bo $n_0(k)$ minimalen n, za katerega velja

$$\binom{n}{k} 2^{-\binom{n}{k}} \geq 1 .$$

Za ta n je leva stran $1 + o(1)$. Opazimo, da $\binom{n}{k}$ raste v n kot n^k. Za vsak $\lambda \in (-\infty, -\infty)$, če

$$n = n_0(k)\Big[1 + \frac{\lambda + o(1)}{k}\Big]$$

velja

$$\binom{n}{k} 2^{-\binom{n}{k}} = \Big[1 + \frac{\lambda + o(1)}{k}\Big]^k = e^k + o(1)$$

in zato

$$P[\omega(G(n,p)) < k] = e^{-e^{-\lambda}} + o(1) .$$

Ko λ preteče od $-\infty$ do ∞, $e^{e^{-\lambda}}$ preteče od 1 do 0. Ker je $n_0(k+1) \sim \sqrt{2}\, n_0(k)$ se dosegi ne bodo prekrivali za različne k, povedano bolj natančno: naj bo K poljubno velik in definirajmo

$$I_k := \left[n_0(k)\Big[1 - \frac{K}{k}\Big], n_0(k)\Big[1 + \frac{K}{k}\Big] \right].$$

Za $k \geq k_0(K)$, $I_{k-1} \cap I_k = \varnothing$. Predpostavimo $n \geq n_0(k_0(K))$. Če n leži med intervali $I_k < n < I_{k+1}$, je

$$P[\omega(G(n,p)) < k] \leq e^{-e^K} + o(1)\,,$$

skoraj 0, in

$$P[\omega(G(n,p)) < k+1] \geq e^{-e^{-K}} + o(1)\,,$$

skoraj 1, zato je

$$P[\omega(G(n,p)) = k] = e^{-e^K} + e^{-e^{-K}} + o(1)\,,$$

skoraj 1. Če $n \in I_k$, še vedno velja $I_{k-1} < n < I_{k+1}$, zato

$$P[\omega(G(n,p)) = k \text{ ali } k-1] = e^{-e^K} + e^{-e^{-K}} + o(1)\,,$$

skoraj 1. Ker je K lahko poljubno velik, dobimo celebrated 2-point concentration theorem na kličnem številu, posledica 5.2 v 4. poglavju, sekcija 5. Opazimo, da je za večino n-jev koncentracija $\omega(G(n,p))$ na singularni vrednosti.

4 Kromatično število

Fiksirajmo $p = \frac{1}{2}$ za to poglavje, saj ostale vrednosti p porodijo podobne rezultate in naj bo G slučajni graf v $\mathcal{G}(n, \frac{1}{2})$. Poiskali bomo meji za kromatično število $\chi(G)$. Definirajmo

$$f(k) = \binom{n}{k} 2^{-\binom{n}{k}}.$$

Naj bo $k_0 = k_0(n)$ tista vrednost, za katero je

$$f(k_0 - 1) > 1 > f(k_0)\,.$$

Potem je $n = \sqrt{2}^{k(1+o(1))}$, zato za $k \sim k_0$

$$\frac{f(k+1)}{k} = \frac{n}{k}\, 2^{-k}\,(1+o(1)) = n^{-1+o(1)}.$$

Postavimo

$$k = k(n) = k_0(n) - 4$$

tako, da

$$f(k) > n^{3+o(1)}\,.$$

Za oceno $P[\omega(G) < k]$ uporabimo posplošeno Janson-ovo neenakost(poglavje 8, izrek 1.2), pri čemer je $\mu = f(k)$. Vrednost Δ je predstavljena v poglavju 4, sekcije 5, kjer je

$$\frac{\Delta}{\mu^2} = \frac{\Delta^*}{\mu} = \sum_{i=2}^{k-1} g(i)\,.$$

Tam sta bila $g(2) \sim \frac{k^4}{n^2}$ in $g(k-1) \sim \frac{2\,k\,n\,2^{-k}}{\mu}$ dominantna člena. V našem primeru je $\mu > n^{3+o(1)}$ in $2^{-k} = n^{-2+o(1)}$, zato $g(2)$ dominira in

$$\Delta \sim \frac{\mu^2\,k^4}{n^2}\,.$$

Omejimo verjetnost kličnega števila

$$P[\omega(G) < k] < \exp\left(\frac{-\mu^2(1+o(1))}{2\,\Delta}\right) = \exp\Big(-n^{2+o(1)}\Big)$$

ko $k = \Theta(\ln n)$.

Izrek 11 (Bollobás [1988]) *Skoraj vedno*

$$\chi(G) \sim \frac{n}{2\,\log_2 n}\,.$$

Dokaz. Independance number(neodvisnostno število) grafa G označimo z $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$. Komplement grafa G ima enako distribucijo $G(n, \frac{1}{2})$, zato je skoraj vedno $\alpha(G) \le (2+o(1))\log_2 n$. Torej velja

$$\chi(G) \ge \frac{n}{\alpha(G)} \ge \frac{n}{2\,\log_2 n}(1+o(1))\,.$$

skoraj vedno. Dokaz obratne neenakosti je bil odprt problem četrt stoletja! Postavimo $m = \lfloor \frac{n}{\ln^2 n} \rfloor$. Za poljubno S množico m vozlišč ima restrikcija $G|_S$ za porazdelitev $G(m, \frac{1}{2})$. Naj bo kot prej $k = k(m) = k_0(m) - 4$. Opazimo

$$k \sim 2\log_2 m \sim 2\log_2 n \,.$$

Potem je

$$P[\alpha[G|_S] < k] < \exp\Big(- m^{2+o(1)} \Big)$$

Ker obstaja $\binom{n}{m} < 2^n = 2^{m^{1+o(1)}}$ takih množic S, je

$$P[\alpha[G|_S] < k \text{ za neko m-množico } S] < 2^{m^{1+o(1)}} \exp\Big(- m^{2+o(1)} \Big) = o(1)\,.$$

To pomeni, da skoraj vedno vsaka množica m-vozlišč vsebuje množico neodvisnih k-vozlišč. Predpostavimo sedaj, da ima G to lastnost. Izberemo množice neodvisnih k-vozlišč ter damo vsaki drugačno barvo dokler ne ostane manj kot m vozlišč. Tem damo vsakemu drugačno barvo. Po tem postopku

$$\begin{aligned} \chi(G) &\leq \left\lceil \frac{n-m}{k} \right\rceil + m \leq \frac{n}{k} + m \\ &= \frac{n}{2\log_2 n}(1+o(1)) + o\Big(\frac{n}{\log_2 n}\Big) \\ &= \frac{n}{2\log_2 n}(1+o(1))\,, \end{aligned}$$

se to pojavi za skoraj vse G.

□

Literatura

[1] R. Diestel, Random graphs, *Graph Theory*, Springer-Verlag, New York 1997, 2000.

[2] N. Alon, J. Spencer, *The Probabilistic Method*, J.Wiley and Sons, New York, 2nd edition, 2000.