DISKRETNA MATEMATIKA 2 1. 3. 07

Brooksov izrek:

$G \neq C_{2n+1}$, $G \neq K_n \Rightarrow \chi(G) \leq \Delta(G)$

Izrek:

$\forall G: \chi(G) \leq \Delta(G)+1$

DOKAZ:

$v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$ barve $:= \{1, 2, \ldots, \Delta(G)+1\}$

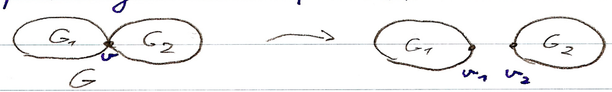
Vsaka ima največ $\Delta(G)$ sosedov pred njo. v_0 pobarvamo z eno barvo (1). Nadaljujemo tako, da vsako točko pobarvamo z najmanjšo možno barvo. Kako pobarvamo v_n?

Vse pred njo so že pobarvane. ~~[illegible]~~ Ta točka ima največ $\Delta(G)$ sosedov, ena barva nam zato gotovo ostane, z njo pa pobarvamo v_n.

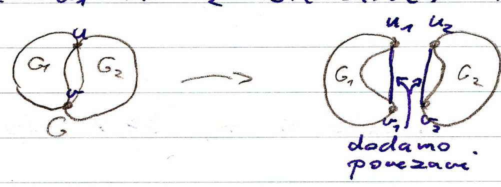
DOKAZ Brooksovega izreka:

Naj bo G najmanjši graf, za katerega izrek ne velja. $\Delta \geq 3$

Trdimo, da je G 3-povezan.

1. 

G_1 in G_2 lahko pobarvamo in permutiramo barve, da bosta v_1 in v_2 iste barve. Nato ju združimo.

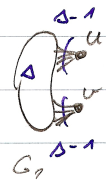
2. 

G_1 in G_2 spet lahko pobarvamo in spet permutiramo barve, da imata u_1 in u_2 enako barvo ter v_1 in v_2 enako barvo.

Vse točke G so stopnje Δ. Recimo, da $d(x) \leq \Delta$. Pobarvamo $G-x$, za x pa imamo vsaj eno prosto barvo.

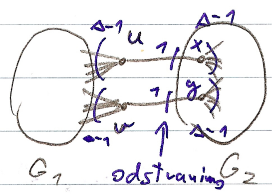
Težave nastopijo, če je eden od G_1, G_2 enak polnemu grafu, ko dodamo povezavo.

$G_i + u_i v_i = K_{\Delta+1}$. V tem primeru ne dodamo povezave $u_1 v_1$



$G_1 - u - v = K_{\Delta-1}$

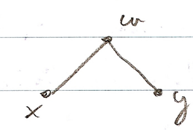
u, v imata stopnjo $\Delta-1$, vse ostale točke v G_1 pa stopnjo Δ. Zato morata biti pobarvani z isto barvo.



Ko odstranimo povezavi iz G v u in iz G v v. G_2 zato znamo pobarvati.

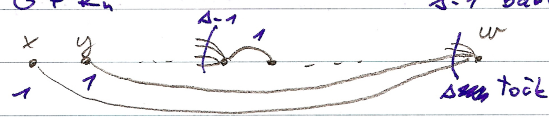
Odstranimo xu in yv. Permutiramo barve v G_2, da na u in v pridete pravi barvi.

$\exists\ x, y, w$:
ker $G \neq K_n$

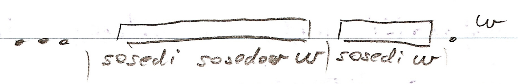


$G - x - y$ še vedno povezan

$\Delta-1$ barv



vsaj ena povezana gre naprej



Hadwigerjeva domneva

$K_{\chi(G)} <_m G$. Vsak graf, ki ima kromatično število k, je skrčljiv na K_k.

$k \leq 4$ "na roke", $k = 5, 6$ z uporabo 4 CT, $k \geq 7$ odprto

$k=1$: $G = K_1$

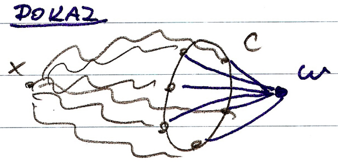
$k=2$: $\Leftrightarrow$ 2-delen graf $\Rightarrow$ vsebuje K_2

$k=3$: Vsak graf z $\chi(G) = 3$ vsebuje lih cikel C_{2l+1}, ta pa kot minor vsebuje K_3.

$k=4$: Lema: (Menger)

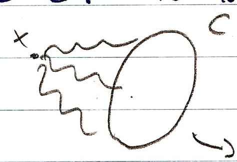
Za cikel C in $x \in G \setminus C$ $\exists$ k disjunktnih poti od x do C.

DOKAZ



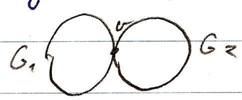
Dodamo točko w in jo povežemo z vsemi točkami cikla C. Graf je k-povezan, torej obstaja k disjunktnih poti od x do w. Odstranimo w. Obstaja k disjunktnih poti od x do C. (Menger) □

- G naj bo 3-povezan. Naj bo C najdaljši cikel v G. Torej obstaja točka $x \in G \setminus C$. Po lemi $\exists$ 3 disjunktne poti od x do C.



Torej G vsebuje K_4-minor

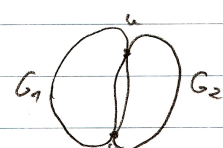
- G naj bo povezan. Naj bo minimalni protiprimer. v naj bo prerezna točka.



Eden od G_1 ali G_2 ima $\chi(G_i)=4$, recimo G_1. Drugače sta oba 3-obarvljiva.

$\Rightarrow$ G min. protiprimer in $G_1 \leq G \Rightarrow G_1 >_m K_4$

- G naj bo 2-povezan

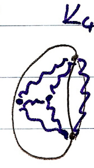


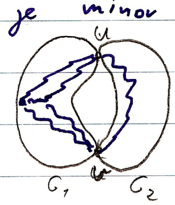
G_1+uv, G_2+uv - eden mora imeti $\chi(G_i)=4$, recimo G_1.

Po indukciji $G_1 >_m K_4$.

•• K_4 ne vsebuje uv: K_4-minor je minor v G.

•• K_4 vsebuje uv:





Pot v G_2 obstaja, drugače G ni 2-povezan.