Upodobitve ali reprezentacije grafov

Arjana Žitnik

25. maj 2011

Reprezentacije

Naj bo G graf in M množica. Par preslikav

$$\rho_V : V(G) \to M, \ \ \rho_E : E(G) \to \mathcal{P}(M)$$

imenujemo **reprezentacija grafa** ali M-**reprezentacija grafa** G, če velja:

$$\text{za } e = uv \text{ je } \rho_V(v) \in \rho_E(e).$$

Če nas ρ_E ne zanima: za vsako povezavo $e = uv$ je

$$\rho_E(uv) := \{\rho_V(u), \rho_V(v)\}$$

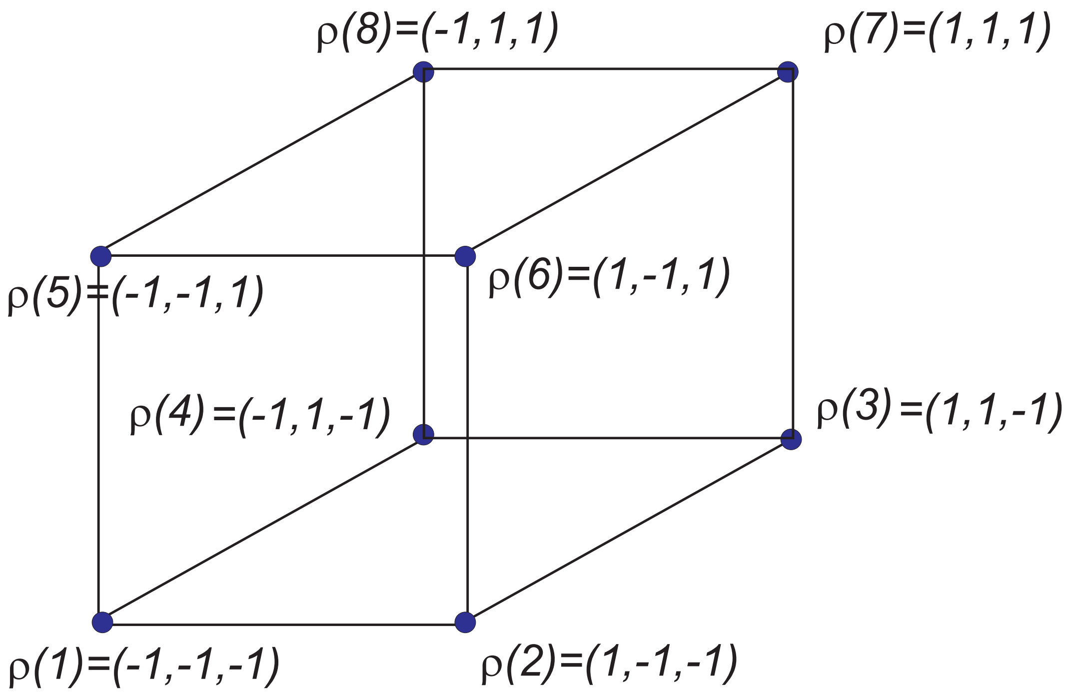
Reprezentacija je **zvesta**, če je preslikava ρ_V injektivna.

Primer - kocka v $\mathbb{R}^3$.

Graf G:

$$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$E(G) = \{12, 14, 15, 23, \\ 26, 34, 37, 48, \\ 56, 58, 67, 78\}$$



$$\rho : V(G) \to \mathbb{R}^3$$

$$\rho : E(G) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$$

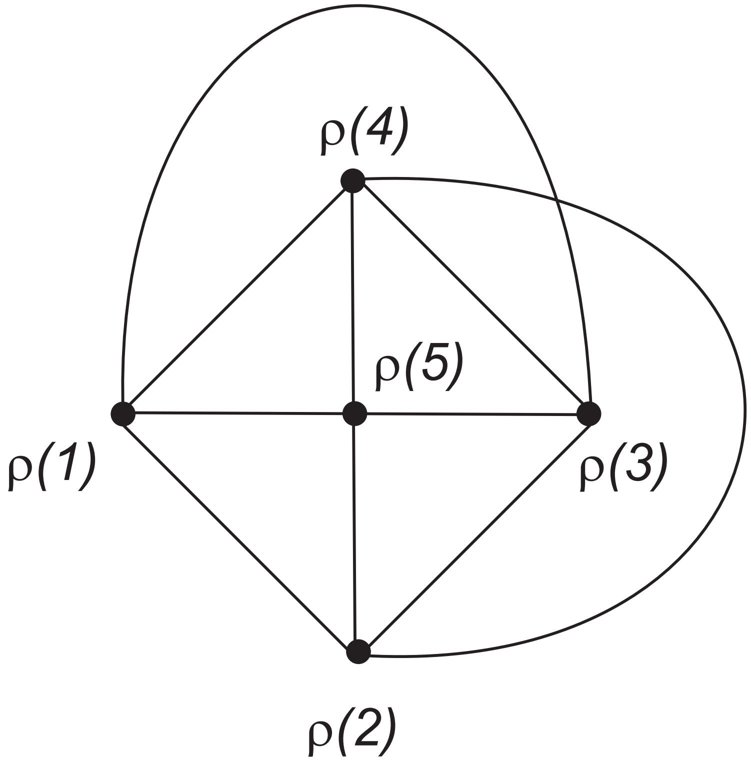
$$\rho(uv) = conv(\rho(u), \rho(v))$$

Primer - K_5 v ravnini.

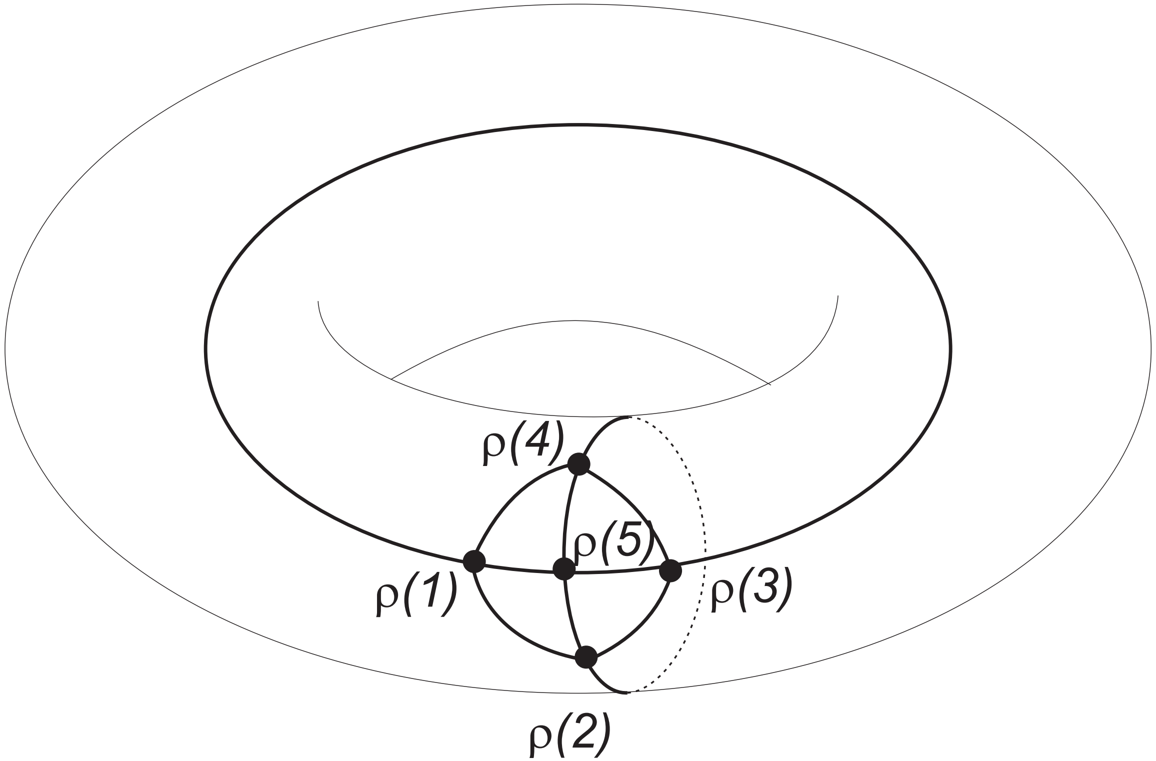
Graf K_5:

$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$E(G) = \{12, 13, 14, 15,$$
$$22, 24, 25,$$
$$34, 35, 45\}$$



Primer - vložitev grafa



Primer - barvanje grafov

Naj bo G graf, $M = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Reprezentacija

$$\rho : V \to M,$$
$$\rho : uv \mapsto \{\rho(u), \rho(v)\}$$

je **barvanje grafa**, če je $|\{\rho(u), \rho(v)\}| = 2$ za vsako povezavo $uv \in E(G)$.

Vektorske reprezentacije

Če je M vektorski prostor, lahko reprezentacijo imenujemo **vektorska reprezentacija**.

Ponavadi vzamemo kar $M = \mathbb{R}^m$ in

$$\rho(uv) = conv(\rho(u), \rho(v)).$$

Tipično: $m = 2, 3$.

Primerjava reprezentacij - energija

Naj bo M metričen prostor in d razdalja.
Dolžino povezave $e = uv$ glede na ρ je

$$||e||_\rho = d(\rho(u), \rho(v)).$$

Energijo reprezentacije $\rho : V(G) \to M$ lahko definiramo kot

$$\mathcal{E}_p(\rho) = (\sum_{uv \in E(G)} d(\rho(u), \rho(v))^p)^{(1/p)}$$

Čim nižja energija naj bi dala čim boljšo reprezentacijo.

Da ne bodo vsa vozlišča padla v isto točko, moramo uvesti kakšno omejitev.

Energija $\mathcal{E}_2(\rho)$ v $\mathbb{R}^m$

V $\mathbb{R}^m$: $d(x, y) = ||x - y||$.

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_{uv \in EG} ||\rho(u) - \rho(v)||^2 = \sum_{uv \in EG} \sum_{i=1}^{m} (\rho(u)_i - \rho(v)_i)^2$$

Kakšne reprezentacije danega grafa G v $\mathbb{R}^m$ minimizirajo to energijo?

Baricentrične reprezentacije

Reprezentacija ρ grafa G je **baricentrična** glede na $S \subseteq V(G)$, če je vsak $u \notin S$ težišče (baricenter) slik svojih sosedov:

$$\rho(u) = \frac{1}{deg\, u} \sum_{v \sim u} \rho(v).$$

Izrek 1. *Naj bo G povezan graf, $S \subseteq VG$, $S \neq \emptyset$, in $\sigma : S \to \mathbb{R}^m$. Potem obstaja enolično določena reprezentacija, ki je razširitev σ na G in je baricentrična glede na S.*

Izrek 2. *Naj bo G graf, $S \subseteq VG$ in $\sigma : S \to \mathbb{R}^m$. Med vsemi reprezentacijami ρ, za katere je $\rho|_S = \sigma$, ima najmanjšo energijo tista, ki je baricentrična reprezentacija grafa G glede na S.*

Tuttova metoda

Izrek 3. [Tutte] *Naj bo G 3-povezan ravninski graf in C induciran cikel, ki ne separira grafa. Naj bo σ preslikava, ki $V(C)$ preslika v oglišča konveksnega $|V(C)|-$kotnika v $\mathbb{R}^2$ na tak način, da sta dve vozlišči sosednji v C sosednji tudi v poligonu. Potem baricentrična razširitev σ določa vložitev grafa G v ravnino.*

Algoritem za vložitev 3-povezanega ravn. grafa v ravnino:

- Izberemo induciran cikel C grafa G, ki ne separira grafa.
- Določimo koordinate vozlišč iz C: σ.
- Baricentrično razširitev ρ dobimo z reševanjem sistema enačb

$$\rho(v) = \frac{1}{deg(v)} \sum_{u \sim v} \rho(u), \;\; v \in V(G) \setminus C.$$

Domača naloga

1. S pomočjo Tuttove metode pokaži, da Petersenov graf $G(5,2)$ ni ravninski.

2. S pomočjo Tuttove metode pokaži, da Petersenov graf $G(6,2)$ je ravninski.

Posplošitve Tutteve metode

- Množica fiksnih točk S ni nujno cikel

- Povezave grafa utežimo glede na oddaljenost od S; naj bo $\delta(v) = \min_{u \in S} d(u, v)$. Potem je

$$w_{ij} = \Phi(\delta(i), \delta(j))$$

  za neko funkcijo $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$, na primer:

  - $w_{ij} = 1 + (\delta(i) - \delta(j))^p$
  - $w_{ij} = \frac{1}{\max(\delta(i), \delta(j))^p}$

Vektorske reprezentacije lahko predstavimo z matriko

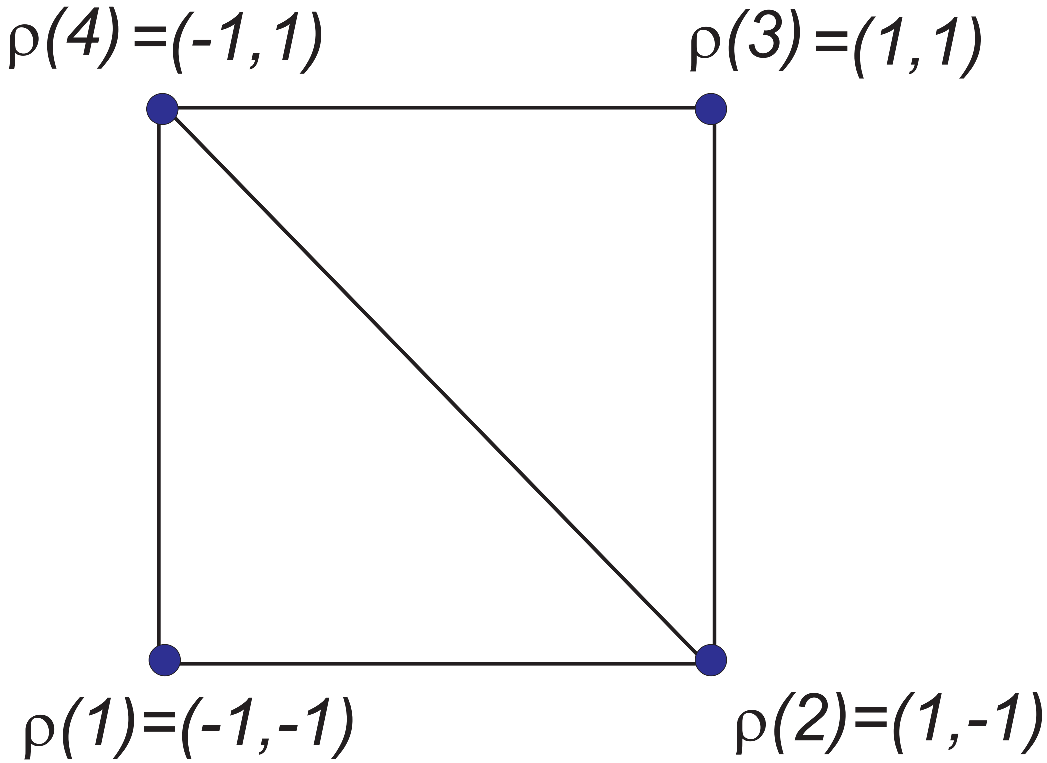
Če gledamo vektorje $\rho(u), u \in V(G)$ kot vrstice, lahko ρ predstavimo z matriko R dimenzije $|V(G)| \times m$, ki ima slike vozlišč za svoje vrstice.

Reprezentacija ρ je **uravnotežena,** če ima težišče (baricenter) v izhodišču:

$$\sum_{u \in VG} \rho(u) = 0.$$

Reprezentacija ρ je **ortonormalna,** če velja $R^T R = I_m$; očitno mora biti $n \geq m$.

Primer - $K_4 - 13$ v ravnini



Laplaceova matrika

$$Q(G) = D(G) - A(G)$$

Lastnosti:

- Vsota elementov v vsaki vrstici je enaka 0.
- 0 je lastna vrednost z lastnim vektorjem $(1, 1, \ldots, 1)^T$.
- Q je pozitivno semidefinitna ($\Rightarrow$ nenegativne lastne vrednosti)

Energija in Laplaceova matrika

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_{uv \in EG} ||\rho(u) - \rho(v)||^2$$

Energijo reprezentacije ρ z matriko R lahko zapišemo kot:

$$\mathcal{E}(\rho) = tr R^T Q(G) R$$

Za utežene grafe z utežmi na povezavah $\omega : EG \to \mathbb{R}^+$ lahko energijo definiramo splošneje:

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_{uv \in EG} \omega_{uv} ||\rho(u) - \rho(v)||^2$$

Laplaceva metoda

Za dani graf G, $m < VG$:

- Poiščemo ortonormirane lastne vektorje $x_2, \ldots, x_{m+1}$ matrike Q, ki pripadajo lastnim vrednostim $\lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots \leq \lambda_{m+1}$

- $R = [x_2, \ldots, x_{m+1}]$, je matrika, ki ustreza uravnoteženi ortogonalni reprezentaciji.

Velja: energija takšne reprezentacije je enaka $\lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_{m+1}$.

Laplaceva metoda-nadaljevanje

Izrek 4. *Naj bo G graf z Laplaceovo matriko Q. Naj bodo lastne vrednosti Q enake $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ in naj bo $\lambda_2 > 0$. Potem je minimalna energija uravnotežene ortogonalne reprezentacije grafa G v $\mathbb{R}^m$ enaka*
$\lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_{m+1}$.

Izrek 5. *Naj bo G 3-povezan ravninski graf in naj ima $\lambda_2 > 0$ večkratnost enako 3. Potem nam Laplaceova metoda da vložitev G na enotsko sfero.*

Prepletanje lastnih vrednosti

Naj bo $m < n$,
A matrika $n \times n$ z lastnimi vrednostmi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots + \lambda_n$,
B matrika $m \times m$ z lastnimi vrednostmi $\mu_1, \mu_2, \ldots + \mu_m$,

Lastne vrednosti A in B se **prepletajo**,če velja:
$\lambda_{n-m+i} \leq \mu_i \leq \lambda_i, \;\; i = 1, \ldots m.$

Izrek 6. *Naj bo A realna simetrična matrika $n \times n$, R matrika $n \times m$, da velja $R^T R = I_m$, in $B = R^T AR$. Potem se lastne vrednosti A in B prepletajo.*

Laplaceova metoda - dokaz izreka 1

Naj bodo $x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}$ lastni vektorji Q za lastne vrednosti $\lambda_1, \lambda_2 + \ldots + \lambda_{m+1}$.

1. Energija ortogonalne reprezentacije v $\mathbb{R}^{m+1}$ je večja od $\lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_{m+1}$.

2. Če je $R = [x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}]$, je ta energija dosežena.

3. $R' = [x_2, x_3, \ldots, x_{m+1}]$ je uravnotežena reprezentacija z enako energijo kot R.

4. $\lambda_2, \lambda_3 + \ldots + \lambda_{m+1}$ je najmanjša možna energija za uravnoteženo ortogonalno reprezentacijo v $\mathbb{R}^m$.

Iterativne metode

Ideje:

- Med vozlišči imamo privlačne in odbojne sile
- Povezave si predstavljamo kot vzmeti
- Minimiziramo energijo, ki upošteva odbojne sile in privlačne sile med sosednjimi vozlišči.
- Pomagamo si s hevrističnimi iterativnimi algoritmi.

Algoritem Kamada-Kawai

Naj bo $d(u,v)$ razdalja v grafu G med vozliščema u in v. Minimiziramo energijo

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_{u,v \in V} \left(\frac{||\rho(u) - \rho(v)|| - d(u,v)}{d(u,v)} \right)^2$$

Na vsakem koraku premaknemo samo eno vozlišče - rešimo sistem dveh enačb z dvema neznankama.

Algoritem Fruchtermana in Reingolda

Energija ni podana eksplicitno, računamo odbojne sile med vsemi pari vozlišč in privlačne sile med sosednjimi vozlišči. Naj bo $d = ||\rho(u) - \rho(v)||$ razdalja med slikama vozlišč.

- Privlačne sile: $f_a(d) = d^2/k$.

- Odbojne sile: $f_r(d) = k^2/d$.

Konstanta k predstavlja idealno dolžino povezave.

Algoritem Davidsona in Harela

Podoben algoritmu Fruchtermana in Reingolda, a splošnejši.

- Več različnih konstant.
- Dodatni členi pri energijski funkciji, ki kaznujejo križanje povezav, preveliko bližino vozlišč in nesosednjih povezav...
- Uporabi metodo lokalne optimizacije z ohlajanjem.

Eadesov algoritem

Peter Eades je prvi, ki je predlagal iterativno risanje grafov na osnovi odbojnih in privlačnih sil med vozlišči.

- Privlačne sile: $f_a(d) = k_1 \log(\frac{d}{k_2})$
- Odbojne sile: $f_r(d) = k_3/d^2$

Pri tem so k_1, k_2 in k_3 primerno izbrane konstante in d razdalja med slikama vozlišč.

Schleglov diagram

Schleglov diagram poliedra dobimo s stereografsko ali kakšno drugo centralno projekcijo 1-skeleta k-dimenzionalnegan poliedra v eno od njegovih lic.
Splošneje: risba grafa G v v konveksnem območju v ravnini, ki ga določajo vozlišča iz dane množice $S \subseteq V(G)$.

Bor Plestenjak uporabi

- $f_a(d) = kd^3$ za privlačne sile,
- $f_r(d) = 0$ za odbojne sile,
- parameter k je odvisen od razdalje v grafu posameznega vozlišča do zunanjega cikla, da se vozlišča preveč ne zgostijo proti sredini cikla.

Splošen iterativen algoritem z ohlajanjem

Vhodni podatki:

- G - graf,
- m - dimenzija reprezentacije,
- $\mathcal{E}$ - funkcija za energijo,
- S - množica vozlišč grafa G, ki jih ne premikamo,
- σ - koordinate (vektorji) za vozlišča iz S.

Parametri:

- d - največji premik v enem koraku,
- N - število iteracij,
- $1 = T(0) \geq T(1) \geq ... \geq T(N) > 0$ - način ohlajanja (temperature).

Izhod:

ρ - reprezentacija grafa G v $\mathbb{R}^m$ z majhno, skoraj optimalno energijo $\mathcal{E}(\rho)$.

Koda

1. Za vsako vozlišče $v \in S$ naj bo $\rho(v) = \rho'(v) := \sigma(v)$.

2. Za vsako vozlišče $v \in VG \setminus S$ izberi vektor $\rho(v) \in \mathbb{R}^m$.

3. Za $k = 1, 2, ..., N$ ponavljaj

   (a) Za vsako vozlišče $v \in VG \setminus S$ ponovi
      i. Izberi vektor $\delta(v) \in \mathbb{R}^m$.
      ii. Izberi število $\lambda(v) \in \mathbb{R}$ za katero je $|\lambda(v)| \leq dT(k)$.
      iii. Naj bo $\rho'(v) := \rho(v) + \lambda(v)\delta(v)$

   (b) Če je $\mathcal{E}(\rho') < \mathcal{E}(\rho)$ potem $\rho = \rho'$

4. Vrni ρ

Implementacija

- algoritem lahko enostavno priredimo različnim funkcijam za energijo in raznim omejitvam tako da bodo bolj učinkoviti

- Naključna izbira $\delta(v) \in \mathbb{R}^m$ in $\lambda(v) \in \mathbb{R}$ nam ponavadi da slabe rezultate, preveč natančna izbira pa lahko preveč upočasni vsak korak algoritma.

- Za $S = \emptyset$ dobimo običajne risbe, kot Kamada-Kawai, Fruchterman-Reingold, Eades, ali Davidson-Harel. Za neprazne S dobimo razne variacije na Tutte-ovo metodo.

- Algoritem lahko na vsakem (ali vsakih nekaj) korakov pikaže novo risbo na ekranu.

- Za risbe v $\mathbb{R}^m$ je potem treba izbrati primerno projekcijo v $\mathbb{R}^2$.

- Nevarnosti: graf "odplava" iz zaslona; vsa vozlišča padejo v isto točko, če $S = \emptyset$ ali nimamo odbojnih sil; graf se širi v neskončnost, če ni povezan...

Literatura

1. Davidson Ron Davidson and David Harel. Drawing graphs nicely using simulated annealing. **ACM Transactions on Graphics**, 15(4):301–331, 1996.

2. Eades Peter Eades. A heuristic for graph drawing. **Congressus numerantium**, 42:149–160, 1984.

3. Fruchterman T. M. J. Fruchterman and E. M. Reingold. Graph drawing by force–directed placement. **Software Practice and Experience**, 21(11):1129–1164, 1991.

4. Godsil Chris Godsil and Gordon Royle. **Algebraic Graph Theory**. Springer, New York, 2001.

5. Kamada Tomihisa Kamada and Satoru Kawai. An algorithm for drawing general undirected graphs. **Inform. Process. Lett.**, 31(1):7–15, 1989.

6. Pisanski Tomaž Pisanski and John Shawe Taylor. Characterizing graph drawing with eigenvectors. **J. Chem. Inf. Comput. Sci.**, 40:567–571, 2000.

7. Plestenjak Bor Plestenjak. An algorithm for drawing planar graphs. **Software - Practice and Experience**, 29(11):973–984, 1999.

8. MR W. T. Tutte. How to draw a graph. **Proc. London Math. Soc. (3)**, 13:743–767, 1963.