2. kolokvij iz diskretnih struktur
Ljubljana, 1. februar 1999

1. Izjave deduktivne teorije $\mathcal{T} = (\mathcal{E}, \mathcal{I})$ imajo obliko $a^n b^m$ za $n, m \geq 0$. Razred izrekov $\mathcal{I}$ je določen takole:

   $A.$ $\quad \vdash \lambda,$
   $P1.$ $\quad X \vdash a^5 X,$
   $P2.$ $\quad X \vdash X b^5,$
   $P3.$ $\quad aXb \vdash X.$

   (a) Podaj induktivno definicijo razreda izjav $\mathcal{E}$.
   (b) Katere od naslednjih izjav so izreki?

   (b1.) $a^2 b^{10}$ (b2.) $a^7 b^2$ (b3.) $a^{1999} b$

   (c) Pokaži: če je $a^m b^n$ izrek teorije $\mathcal{T}$, potem sta izreka tudi $a^n b^m$ in $a^{3m} b^{3n}$.

2. Za poljubne množice A, B, C in D velja $A \subseteq C$ in $B \subseteq D$. Ali veljata zvezi

   (a) $A \setminus D \subseteq B \setminus C$ oziroma
   (b) $A + C \subseteq B + D$.

   Dokaži ali poišči protiprimer.

3. Na množici $\mathcal{A} = \mathcal{P}\{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geq 2$, definiramo relacijo R takole:

   $$A\,R\,B \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} A + B \subseteq \{1, n\}$$

   (a) Pokaži, da za poljubne množice A, B in C velja $A + C \subseteq (A + B) \cup (B + C)$.
   (b) Pokaži, da je R tranzitivna. (privzameš lahko točko (a))
   (c) Ali je R ekvivalenčna? Če je, poišči število ekvivalenčnih razredov $\mathcal{A}/R$ za primer $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

4. Na množici $\{a, b, c, d, e\}$ je dana relacija

   $$Q = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, d), (c, e), (e, b), (e, d)\}.$$

   (a) Nariši graf relacije Q.
   (b) Določi Q^{1999}.
   (c) Določi $\overline{Q}$. (tranzitivna ovojnica)

   Rezultate za točki (b) in (c) podajte v obliki matrike ali množice parov.

Čas reševanja je 90 minut. Vse naloge so enakovredne.
Vse odgovore dobro utemelji!