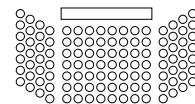


Diskretna matematika 1: 2. izpit

15. februar 2016

Čas reševanja je 90 minut. Vse odgovore utemeljite. Veliko uspeha!



Sedež (2.05)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Ime in priimek

1. naloga (25 točk)

Naj bo α realno število in N naravno število. Dokaži, da se vsaj eno izmed števil $1\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots, N\alpha$ od celega števila razlikuje za manj kot $1/N$. Nasvet: če sta za $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ števili $i\alpha - [i\alpha]$ in $j\alpha - [j\alpha]$ blizu (ti dve števili se ne razlikujeta za veliko), razmisli, kako sestaviti novo število $k\alpha$ za nek $k \in \{1, 2, \dots, N\}$, ki je blizu celega števila.

2. naloga (25 točk)

Imamo tri košare. V prvi košari imamo 5 belih kroglic, v drugi 10 rdečih kroglic, in v tretji neskončno modrih kroglic. Zanima nas, na koliko načinov lahko iz košar izberemo n kroglic, če mora število modrih kroglic biti sodo, število rdečih kroglic pa ne sme biti deljivo s 3.

Primer: 7 kroglic lahko na primer izberemo tako, da iz prve košare vzamemo 1 belo, iz druge 4 rdeče in iz tretje 2 modri kroglici. Izbira 2 belih, 2 rdečih in 3 modrih kroglic pa ni v redu, saj imamo liho mnogo modrih kroglic.

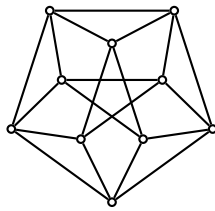
a) (15 točk) Za vsako košaro zapiši rodovno funkcijo ustrezne izbire n kroglic. Funkcije zapiši v kompaktni obliki (kot nek ulomek).

b) (10 točk) Na koliko načinov lahko, upoštevajoč zgornja pravila, iz treh košar izberemo 8 kroglic?

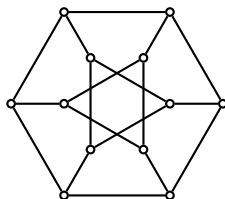
3. naloga (25 točk)

Za vsakega od sledečih grafov ugotovi, ali je ravninski graf. Svojo trditev tudi utemelji.

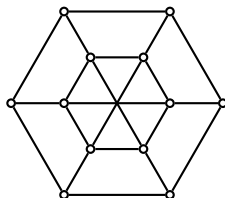
a) (8 točk) Graf G_1 :



b) (8 točk) Graf G_2 :



c) (9 točk) Graf G_3 :



4. naloga (25 točk)

Naj bo $G(i)$ za $2 \leq i \leq 16$ graf, ki ga konstruiramo tako: vzamemo dva cikla na vozliščih $\{1, 2, 3, \dots, 16\}$ in $\{1', 2', 3', \dots, 16'\}$, tako da so zaporedna vozlišča povezana s povezavo. Nato dodamo povezave med j in j' za vsak $1 \leq j \leq 16$. Nazadnje dodamo novo vozlišče ∞ in ga povežemo z vozliščema 1 in i (obe v prvem ciklu). Za katere i je graf $G(i)$ hamiltonski? Svojo trditev dokaži (skiciraj Hamiltonov cikel ali dokaži, da ga ni).