Dodelitve vlog

Andreja Zorko, Lučka Lenič, Lea Letnar, Klavdija Jagar

12. april 2012

Uvod

Splošna definicija razvrščanja je podana z:

- grafom $G = (V, E)$ in
- particijo vozlišč V, ki je združljiva z E.

Tri različne formulacije:

- ekvivalenčne relacije,
- particije vozlišč in
- dodelitve vlog.

Definicija

*Za ekvivalenčno relacijo $\sim$ (oziroma krajše **ekvivalenco**) na množici V, z $[v] = \{u; u \sim v\}$ označimo **ekvivalenčni razred** vozlišča v.*

Uvod

Definicija

Particija *$\mathcal{P} = \{C_1, \ldots, C_k\}$ množice V je množica nepraznih, disjunktnih podmnožic $C_i \subseteq V$, imenovanih **razredi** ali **bloki**, tako da je $V = \bigcup_{i=1}^{k} C_i$. Če je $\mathcal{P} = \{V\}$, pravimo, da je particija **polna**.*

Definicija

Dodelitev vlog *za V je surjektivna preslikava $r : V \longrightarrow W$ na neko množico vlog W.*

Za vsako particijo vozlišč je enolično določena ekvivalenčna relacija in enolično določena dodelitev vlog in isto velja za vse ostale kombinacije. Na primer: dodelitev vlog r definira particijo množice V, tako da za razrede vzamemo praslike

$$r^{-1}(w) = \{v \in V; r(v) = w, w \in W\}.$$

Graf vlog

Definicija

Naj bo $G = (V, E)$ graf in $r : V \longrightarrow W$ dodelitev vlog. ***Graf vlog*** *$R = (W, F)$ je graf z množico vozlišč W (tj. množica vlog) in množico povezav $F \subseteq W \times W$, definirano z*

$$F := \{(r(u), r(v)); \exists u, v \in V, \text{ da je } (u, v) \in E\}.$$

R imenujemo tudi ***kvocient*** *grafa G nad r.*

Cilj analize vlog:
Poiskati take dodelitve vlog, da bo ustrezen graf vlog predstavil bistvene strukturne lastnosti omrežja in da se ne bo izgubilo preveč informacij.

Strukturna ekvivalenca

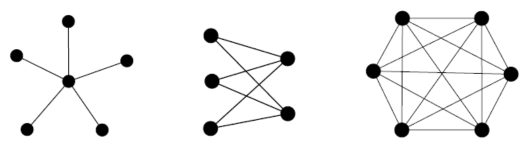
Definicija

*Naj bo $G = (V, E)$ graf in $r : V \to W$ dodelitev vlog. Pravimo, da je r **krepko strukturna**, če imajo ekvivalentna vozlišča iste (izhodne in vhodne) soseščine, tj. če za vsa $u, v \in V$*

$$r(u) = r(v) \implies N^+(u) = N^+(v) \text{ in } N^-(u) = N^-(v).$$

Primer

Identična preslikava $id : V \to V;\ v \mapsto v$ je krepko strukturna za vsak graf $G = (V, E)$, neodvisno od E.
Nekateri nekoliko manj trivialni primeri so prikazani na spodnji sliki.



Strukturna ekvivalenca

Nekaj osnovnih lastnosti strukturnih ekvivalenc:

- Razred krepko strukturno ekvivalentnih vozlišč v grafu je bodisi neodvisna množica (inducira graf brez povezav) ali pa klika z vsemi zankami.
- Neusmerjena razdalja dveh strukturno ekvivalentnih (neizoliranih) vozlišč je največ 2.
- Če sta u in v strukturno ekvivalentni in ima u sosedo w, potem je w tudi soseda v.

Mreža ekvivalenčnih relacij

Definicija

Ekvivalenčne relacije na množici V so podmnožice $V \times V$, torej se jih lahko delno uredi z inkluzijo ($\sim_1 \leq \sim_2$ natanko tedaj, ko $\sim_1 \subseteq \sim_2$). Pravimo, da je $\sim_1$ ***finejša*** *kot $\sim_2$ in $\sim_2$ je* ***šibkejša*** *(bolj groba) kot $\sim_1$.*

Definicija

Mreža *je delno urejena množica L, za katero za vse $a, b \in L$ obstajata $sup(a, b)$ in $inf(a, b)$.*

Definicija

Če sta $\sim_1$ in $\sim_2$ ekvivalenčni relaciji na V, potem je infimum $\sim_1$ in $\sim_2$ njun presek (kot množici).

Mreža ekvivalenčnih relacij

Definicija

Tranzitivno zaprtje *relacije* $R \subseteq V \times V$ *definiramo kot relacijo* $S \subseteq V \times V$*, kjer za vse* $u, v \in V$ *velja:*
$uSv \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, \exists w_1, \ldots, w_k \in V$*, tako da* $u = w_1, v = w_k$ *in* $\forall i = 1, \ldots, k-1$ *je* $w_i R w_{i+1}$.

Definicija

Če sta $\sim_1$ *in* $\sim_2$ *ekvivalenčni relaciji na* V*, potem je supremum* $\sim_1$ *in* $\sim_2$ *tranzitivno zaprtje njune unije.*

Izrek

Množica ekvivalenčnih relacij je mreža.

Mreža strukturnih ekvivalenc

Trditev

Če sta $\sim_1$ *in* $\sim_2$ *krepko strukturni ekvivalenci v grafu, potem sta to tudi njun presek in tranzitivno zaprtje njune unije.*

Trditev

Množica krepko strukturnih ekvivalenc grafa je podmreža mreže vseh ekvivalenčnih relacij.

Trditev

Če je $\sim_1 \leq \sim_2$ *in je* $\sim_2$ *krepko strukturna ekvivalenca, potem je to tudi* $\sim_1$.

V posebnem, v grafu vedno obstaja **maksimalna strukturna ekvivalenca** (MSE) in za njen izračun obstaja algoritem z linearno časovno zahtevnostjo.

Regularna ekvivalenca

Definicija

Če je $r : V \to W$ *dodelitev vlog in* $U \subseteq V$, *potem je* $r(U) = \{r(u); u \in U\}$ *njena* ***množica vlog***.

Definicija

Dodelitev vlog $r : V \to W$ *se imenuje* ***regularna***, *če za vse* $u, v \in V$

$$r(u) = r(v) \implies r(N^+(u)) = r(N^+(v)) \text{ in } r(N^-(u)) = r(N^-(v)).$$

Enačbi na desni sta enačbi množic.
Identična preslikava id: $V \to V$; $v \mapsto v$ je regularna za vse grafe.
Vsaka strukturna dodelitev vlog je regularna.

Lastnosti regularnih ekvivalenc

Definicija

Ponor *imenujemo vozlišče z ničelno izhodno stopnjo,* ***izvor*** *pa vozlišče z ničelno vhodno stopnjo.*

Trditev

Polna particija grafa $G = (V, E)$ je regularna natanko tedaj, ko G ne vsebuje niti ponorov niti izvorov ali pa je $E = \emptyset$.

Identiteta in polna particija sta **trivialni** dodelitvi vlog.

Lema

Naj bo G krepko povezan graf. Potem za katerokoli netrivialno dodelitev vlog r grafa G in za vsako vozlišče v ne drži niti $\{r(v)\} = r(N^+(v))$ niti $\{r(v)\} = r(N^-(v))$.

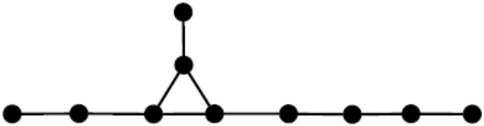
Lastnosti regularnih ekvivalenc

Definicija

Graf z vsaj tremi vozlišči, čigar edine dodelitve vlog so trivialne, imenujemo ***vlogovno primitiven****.*

Izrek

Graf na spodnji sliki je vlogovno primitiven.



Slika: Neusmerjen vlogovno primitiven graf

Lastnosti regularnih ekvivalenc

Definicija

Graf, v katerem je vsaka dodelitev vlog regularna, se imenuje ***poljubno vlogovno določljiv***.

Lema

Krepko povezan graf $G = (V, E)$ *je poljubno vlogovno določljiv natanko tedaj, ko je poln, možno z nekaj, toda ne nujno vsemi zankami.*

Struktura mreže in regularna notranjost

Izrek

Množica vseh regularnih ekvivalenčnih relacij grafa G tvori mrežo, kjer je supremum zožitev supremuma mreže vseh ekvivalenčnih relacij.

Posledica

Če je G graf, potem obstajata maksimalna in minimalna regularna ekvivalenčna relacija za G.

Trditev

Mreža regularnih ekvivalenčnih relacij ni podmreža mreže vseh ekvivalenčnih relacij.

Struktura mreže in regularna notranjost

Definicija

Naj bo G graf in $\sim$ ekvivalenčna relacija na množici vozlišč grafa G. Ekvivalenčno relacijo $\sim_1$ imenujemo ***regularna notranjost*** $\sim$*, če zadošča naslednjim pogojem.*

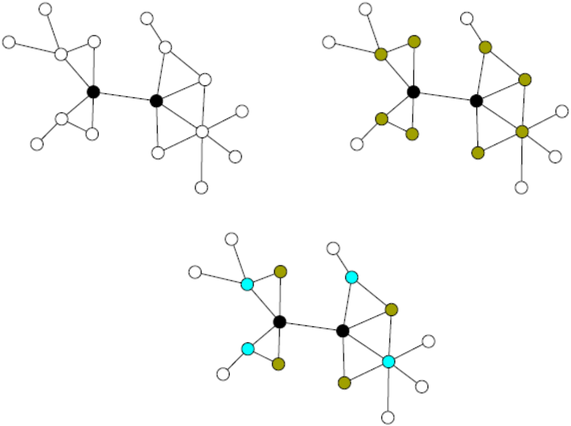
1. $\sim_1$ *je regularna,*
2. $\sim_1 \leq \sim$,
3. *za vse* $\sim_2$*, ki izpolnjujejo zgornja pogoja, velja* $\sim_2 \leq \sim_1$.

Izračun regularne notranjosti

Regularna notranjost ekvivalenčne relacije $\sim$ je najbolj groba regularna rafinacija $\sim$.
Lahko jo izračunamo:

- začnemo z $\sim$,
- množico trenutno ekvivalentnih vozlišč z neekvivalentnimi soseščinami razbijemo,
- to ponavljamo dokler ekvivalentna vozlišča nimajo ekvivalentnih soseščin.

Izračun regularne notranjosti - primer



Izračun regularne notranjosti - CATREGE

- CATREGE v vsakem koraku rafinacije hrani trenutno particijo $\mathcal{P}$, katera je na začetku enaka polni particiji (ali alternativno lahko kot vhodni podatek podamo poljubno particijo).
- V vsakem koraku rafinacije za vsak par ekvivalentnih vozlišč (glede na $\mathcal{P}$) preveri ali so njune soseščine ekvivalentne (glede na $\mathcal{P}$). Če so, potem vozlišči ostaneta ekvivalentni, drugače pa po tem koraku rafinacije nista več ekvivalentni.
- Algoritem se konča, če se ne zgodi nobena sprememba.

PROBLEM RELACIJSKO NAJŠIBKEJŠE PARTICIJE
Kot vhodna podatka podamo (usmerjen) graf $G = (V, E)$ in particijo $\mathcal{P}$ množice vozlišč V.

Za $S \subseteq V$ pišemo:
$E(S) := \{v \in V; \exists u \in S$, tako da $uEv\}$ in
$E^{-1}(S) := \{u \in V; \exists v \in S$, tako da $uEv\}$.

Naj bosta $B \subseteq V$ in $S \subseteq V$. Potem pravimo, da je B **stabilna** glede na S, če velja $B \subseteq E^{-1}(S)$ ali $B \cap E^{-1}(S) = \emptyset$.
Naj bo $\mathcal{P}$ particija V. Potem je $\mathcal{P}$ **stabilna** glede na S, če so vsi njeni bloki stabilni glede na S. Pravimo, da je $\mathcal{P}$ **stabilna**, če je stabilna glede na vsak svoj blok.

FUNKCIJA Razbitje
Za vsako particijo $\mathcal{Q}$ množice V in podmnožico $S \subseteq V$ naj bo $\textsc{Razbitje}(S, \mathcal{Q})$ rafinacija $\mathcal{Q}$.

Kako jo dobimo?
Vsak blok B particije $\mathcal{Q}$, za katerega velja $B \cap E^{-1}(S) \neq \emptyset$ in $B \setminus E^{-1}(S) \neq \emptyset$, zamenjamo z blokoma $B' := B \cap E^{-1}(S)$ in $B'' := B \setminus E^{-1}(S)$.

S imenujemo **osnova razbitja** particije $\mathcal{Q}$, če $\textsc{Razbitje}(S, \mathcal{Q}) \neq \mathcal{Q}$.
Opomba: $\mathcal{Q}$ je nestabilna glede na $S \Leftrightarrow S$ je osnova razbitja particije $\mathcal{Q}$.

LASTNOSTI FUNKCIJE Razbitje

1. Rafinacija **podeduje** stabilnost, tj. če je $\mathcal{R}$ rafinacija $\mathcal{P}$ in $\mathcal{P}$ stabilna glede na S, potem je tudi $\mathcal{R}$ stabilna glede na S.
2. Stabilnost se **podeduje** pri uniji, tj. če je particija stabilna glede na dve množici, potem je stabilna tudi glede na njuno unijo.
3. Funkcija $\textsc{Razbitje}$ je **monotona** v drugem argumentu, tj. če je $\mathcal{P}$ rafinacija $\mathcal{R}$, potem je $\textsc{Razbitje}(S, \mathcal{P})$ rafinacija $\textsc{Razbitje}(S, \mathcal{R})$.
4. Funkcija $\textsc{Razbitje}$ je **komutativna** v smislu, da za najbolj grobo rafinacija particije $\mathcal{P}$, ki je stabilna glede na S in Q, velja

$$\textsc{Razbitje}(S, \textsc{Razbitje}(Q, \mathcal{P})) = \textsc{Razbitje}(Q, \textsc{Razbitje}(S, \mathcal{P})).$$

OSNOVNI ALGORITEM

Algoritem hrani particijo $\mathcal{Q}$, ki je na začetku enaka $\mathcal{P}$, in jo rafinira dokler ne dobimo najbolj grobe stabilne rafinacije.

Algoritem ponavlja naslednji korak, dokler $\mathcal{Q}$ ni stabilna:

RAFINIRAJ:

- *Poišči množico S, ki je unija nekaj blokov $\mathcal{Q}$ in je osnova razbitja particije $\mathcal{Q}$;*
- *zamenjaj $\mathcal{Q}$ z* $\textsc{Razbitje}(S, \mathcal{Q})$.

Izrek

Rafinacijski algoritem je pravilen in se konča v največ $n-1$ korakih. Vrne nam enolično določeno najbolj grobo stabilno rafinacijo.

V učinkoviti implementaciji algoritma je uporabno problem skrčiti na takšnega, kjer je $|E(\{v\})| \geq 1$ za vse $v \in V$ (omejimo se na vozlišča z izhodnimi povezavami).

IZBOLJŠAN ALGORITEM

- Poleg trenutne particije $\mathcal{Q}$, dodatno hranimo še particijo $\mathcal{X}$.
- Veljati mora, da je $\mathcal{Q}$ rafinacija $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Q}$ je stabilna glede na vsak blok $\mathcal{X}$.
- Na začetku je $\mathcal{Q} = \mathcal{P}$ in $\mathcal{X}$ je polna particija (V je edini blok).

Izboljšan algoritem ponavlja naslednji korak, dokler ni $\mathcal{Q} = \mathcal{X}$:

RAFINIRAJ:

- *Poišči blok $S \in \mathcal{X}$, ki ni blok $\mathcal{Q}$.*
- *Poišči blok $B \in \mathcal{Q}$ tako, da $B \subseteq S$ in $|B| \leq |S|/2$.*
- *Zamenjaj S znotraj $\mathcal{X}$ z množicama B in $S \setminus B$.*
- *Zamenjaj $\mathcal{Q}$ z $\textsc{Razbitje}(S \setminus B, \textsc{Razbitje}(B, \mathcal{Q}))$.*

Lema

Naj bo particija $\mathcal{Q}$ stabilna glede na množico S, ki je unija nekaj blokov particije $\mathcal{Q}$. Naj bo particija $\mathcal{Q}$ najprej rafinirana glede na blok $B \subseteq S$ in potem glede na $S \setminus B$. Potem veljajo naslednje trditve:

1. *Rafiniranje $\mathcal{Q}$ glede na B razdeli blok $D \in \mathcal{Q}$ na bloka $D_1 = D \cap E^{-1}(B)$ in $D_2 = D - D_1$ če in samo če velja $D \cap E^{-1}(B) \neq \emptyset$ in $D \setminus E^{-1}(B) \neq \emptyset$.*
2. *Rafiniranje $\textsc{Razbitje}(B, \mathcal{Q})$ glede na $S \setminus B$ razdeli D_1 na blok $D_{11} = D_1 \cap E^{-1}(S \setminus B)$ in blok $D_{12} = D_1 - D_{11}$ če in samo če velja $D_1 \cap E^{-1}(S \setminus B) \neq \emptyset$ in $D_1 \setminus E^{-1}(S \setminus B) \neq \emptyset$.*
3. *Rafiniranje $\textsc{Razbitje}(B, \mathcal{Q})$ glede na $S \setminus B$ ne razbije D_2.*
4. *$D_{12} = D_1 \cap (E^{-1}(B) \setminus E^{-1}(S \setminus B))$.*

Pravimo, da je blok S particije $\mathcal{X}$ **enostaven**, če vsebuje le en blok particije $\mathcal{Q}$, in **sestavljen**, če vsebuje vsaj dva bloka particije $\mathcal{Q}$. Različni zapisi podatkov so povezani med sabo na naslednje načine:

- Vsaka povezava uEv kaže na svoj izvor u.
- Vsako vozlišče v kaže na seznam vhodnih povezav uEv.
- Vsakemu bloku $\mathcal{Q}$ pripada število, ki pove njegovo velikost in vsak blok kaže na dvojno povezan seznam svojih vozlišč.
- Vsako vozlišče kaže na blok particije $\mathcal{Q}$, v katerem je vsebovano.
- Vsak blok particije $\mathcal{X}$ kaže na dvojno povezan seznam blokov $\mathcal{Q}$, ki jih vsebuje.
- Vsak blok $\mathcal{Q}$ kaže na blok $\mathcal{X}$, v katerem je vsebovan.

Hranimo tudi množico C sestavljenih blokov particije $\mathcal{X}$. Na začetku C vsebuje le blok V, ki je unija blokov particije $\mathcal{P}$. Če $\mathcal{P}$ vsebuje le en blok, potem je $\mathcal{P}$ že najbolj groba stabilna rafinacija in končamo algoritem.

Da bo trojno razbitje hitro, potrebujemo še en nabor podatkov. Za vsak blok S particije $\mathcal{X}$ in za vsak element $v \in E^{-1}(S)$ hranimo število $\textsc{Preštej}(v, S) := |S \cap E(\{v\})|$.
Vsaka povezava uEv z $v \in S$ vsebuje kazalec na $\textsc{Preštej}(u, S)$.

IZVEDBA ENEGA KORAKA RAFINACIJE

1. (izberi rafinacijski blok).

2. (posodobi $\mathcal{X}$).

3. (izračunaj $E^{-1}(B)$).

4. (rafiniraj $\mathcal{Q}$ glede na B).

5. (izračunaj $E^{-1}(B) \setminus E^{-1}(S \setminus B)$).

6. (rafiniraj $\mathcal{Q}$ glede na $S \setminus B$).

7. (posodobi preštetja).

Problem dodelitve vlog

Problem ($k-$dodelitev vlog ($k - DV$))

Naj bo G graf.
Vprašanje: Ali obstaja regularna ekvivalenčna relacija za G z natanko k ekvivalenčnimi razredi?

Problem ($R-$dodelitev vlog ($R - DV$))

Naj bo G graf.
Vprašanje: Ali obstaja regularna dodelitev vlog $r : V(G) \to V(R)$ z grafom vlog R?

Problem dodelitve vlog

Izrek

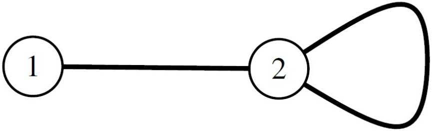
$k - DV$ je polinomsko rešljiv za $k = 1$ in $\mathcal{NP}-$poln za vse $k \geq 2$.

Izrek

$R - DV$ je polinomsko rešljiv, če je vsaka komponenta grafa R sestavljena iz izoliranih točk, brez ali z zankami, ali iz dveh točk brez zank, sicer je $\mathcal{NP}-$poln.

Izrek

Naj bo R_0 graf na spodnji sliki. Potem je $R_0 - DV$ $\mathcal{NP}-$poln.



Obstoj regularne $k-$dodelitve vlog: graf se ne razlikuje preveč od regularnega grafa.

Izrek

Za vse $k \in \mathbb{N}$ obstaja konstanta $c_k \in \mathbb{R}$, tako da za vse grafe z minimalno stopnjo $\delta = \delta(G)$ in maksimalno stopnjo $\Delta = \Delta(G)$, ki zadoščajo

$$\delta \geq c_k \log(\Delta),$$

obstaja regularna ekvivalenčna relacija za G z natanko k ekvivalenčnimi razredi.

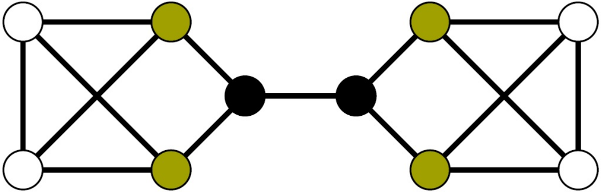
Eksaktna dodelitev vlog

Definicija

Dodelitev vlog je ***eksaktna****, če za vse* $u, v \in V$

$$r(u) = r(v) \Rightarrow r(N(u)) = r(N(v)),$$

kjer je zadnja enačba enakost multimnožic, tj. točke, ki imajo isto vlogo, morajo imeti enako število istih vlog v svojih soseščinah.



Slika: Eksaktna dodelitev vlog

Definicija

Particija $\mathcal{P} = \{C_1, \ldots, C_k\}$ *množice točk* V *neusmerjenega (multi−)grafa* $G = (V, E)$ *imenujemo* ***ekvitabilna****, če obstajajo števila* b_{ij}, $i, j = 1, \ldots, k$, *tako da ima vsaka točka v razredu* C_i *natanko* b_{ij} *sosedov v razredu* C_j. *Matrika* $B = (b_{ij})_{i,j=1,\ldots,k}$ *definira (usmerjen) multigraf, ki ga imenujemo* ***kvocient*** G *po modulu* $\mathcal{P}$, *označimo ga z* $G/\mathcal{P}$.

Particija je ekvitabilna natanko tedaj, ko je prirejena dodelitev vlog eksaktna.

Izrek

Naj bo G graf, $\mathcal{P}$ ekvitabilna particija. Potem karakteristični polinom kvocienta $G/\mathcal{P}$ deli karakteristični polinom grafa G.

Izrek implicira, da je spekter kvocienta $G/\mathcal{P}$ podmnožica spektra G. Množica vseh eksaktnih dodelitev vlog grafa tvori mrežo.

Avtomorfne ekvivalenčne relacije izražajo znotraj-izmenljivost točk.

Definicija

Naj bo $G = (V, E)$ graf, $u, v \in V$. Potem u in v imenujemo ***avtomorfno ekvivalentni****, če obstaja avtomorfizem ϕ grafa G, tako da velja $\phi(u) = v$.*

Trditev

Naj bo $G = (V, E)$ graf z grupo avtomorfizmov $A(G)$ in H naj bo podgrupa $A(G)$. Potem dodeljene vloge glede na orbite H definirajo eksaktno dodelitev vlog za G. Tako particijo imenujemo ***particija orbit****.*

Popolna ekvivalenčna relacija

Popolna ekvivalenčna relacija je omejitev regularne ekvivalenčne relacije.

Definicija

Dodelitev vlog r definira ***popolno ekvivalenčno relacijo****, če za vse $u, v \in V$*

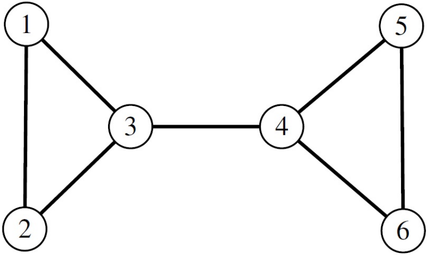
$$r(u) = r(v) \Leftrightarrow r\left(N^{+}(u)\right) = r\left(N^{+}(v)\right), r\left(N^{-}(u)\right) = r\left(N^{-}(v)\right).$$

Popolna ekvivalenčna relacija

Popolna notranjost ekvivalenčne relacije $\sim$ je najbolj groba popolna rafinacija $\sim$.

Izrek

V splošnem tranzitivno zaprtje unije dveh popolnih ekvivalenčnih relacij ni popolno. V posebnem za nekaj ekvivalenčnih relacij ne obstaja popolna notranjost.



Slika: Supremum dveh popolnih ekvivalenčnih relacij ni popoln.

Relativna regularna ekvivalenčna relacija izraža idejo, da imajo ekvivalentne točke ekvivalentne soseščine v bolj grobi, vnaprej definirani meri.

Definicija

*Naj bo $G = (V, E)$ graf in $r : V \to W$, $r_0 : V \to W_0$ dodelitvi vlog. Potem je r **regularna glede na** r_0, če $r \leq r_0$ in za vsaka $u, v \in V$*

$$r(u) = r(v) \Rightarrow r_0\left(N^+(u)\right) = r_0\left(N^+(v)\right), r_0\left(N^-(u)\right) = r_0\left(N^-(v)\right).$$

Trditev

Naj bodo $\sim, \sim_1$ in $\sim_2$ ekvivalenčne relacije na V, tako da $\sim_1 \leq \sim_2$ in $\sim_2$ je regularna glede na $\sim$. Potem je tudi $\sim_1$ regularna glede na $\sim$.

Trditev implicira, da je množica ekvivalenčnih relacij, ki je regularna glede na fiksirano ekvivalenčno relacijo $\sim$, podmreža vseh ekvivalenčnih relacij in je v celoti opisana z maksimumom množice, označene z $MRRE(\sim)$. Izračun $MRRE(\sim)$ je mogoč v linearnem času.

Povzetek

Relativna regularna ekvivalenčna relacija je računsko preprosta, toda potrebuje začetno particijo točk. Najbolj se uporablja pri večkratnih in sestavljenih relacijah.

Grafi z več relacijami

Definicija

Graf z več relacijami *$\mathcal{G} = (V, \mathcal{E})$ je sestavljen iz končne množice vozlišč V in končne množice relacij $\mathcal{E} = \{E_i \mid i = 1, \ldots, p\}$, kjer je $p \in \mathbb{N}$ in $E_i \subseteq V \times V$ množica povezav.*

Definicija

Naj bo $\mathcal{G} = (V, \mathcal{E})$ graf z več relacijami in $r : V \to W$ dodelitev vlog. ***Graf vlog*** *je graf z več relacijami $\mathcal{R} = (W, \mathcal{F})$, kjer je $\mathcal{F} = \{F_i \mid i = 1, \ldots, p\}$ in $F_i = \{(r(u), r(v)) \mid (u, v) \in E_i\}$.*

Definicija

Dodelitev vlog $r : V \to W$ za graf z več relacijami $\mathcal{G} = (V, \mathcal{E})$ je ***tipa*** *t, če je za vsak $E \in \mathcal{E}$ tipa t za graf (V, E).*

Grafi z več relacijami

Definicija

*Naj bo $\mathcal{G} = (V, \mathcal{E})$ graf z več relacijami. Dodelitev vlog $r : V \to W$ je **regularna** za $\mathcal{G}$, če je za vsak $E \in \mathcal{E}$ regularna za graf (V, E).*

Definicija

*Naj bo $\mathcal{G} = (V, \mathcal{E})$ graf z več relacijami in $u, v \in V$. **Sveženj (relacij)** od u do v je množica $B_{uv} = \{E \in \mathcal{E} \mid (u, v) \in E\}$.*

Grafi z več relacijami

Definicija

Naj bo $\mathcal{G} = (V, \mathcal{E})$ graf z več relacijami in $\mathcal{B}$ množica vseh nepraznih svežnjev. Za vsak sveženj $B \in \mathcal{B}$ definiramo graf z množico vozlišč V in množico povezav M_B, za katero velja

$$(u, v) \in M_B \;\Leftrightarrow\; B_{uv} = B.$$

*Označimo $\mathcal{M} = \{M_B \mid B \in \mathcal{B}\}$. M_B je **mnogoterna relacija**, inducirana z grafom $\mathcal{G}$, $MPX(\mathcal{G}) := (V, \mathcal{M})$ pa **mnogoteren graf** grafa $\mathcal{G}$.*

Grafi z več relacijami

Definicija

Naj bo $\mathcal{G} = (V, \mathcal{E})$ graf z več relacijami. Dodelitev vlog $r : V \to W$ je ***mnogoterno regularna*** *za $\mathcal{G}$, če je regularna za $MPX(\mathcal{G})$.*

Trditev

Naj bo $\mathcal{G} = (V, \mathcal{E})$ graf z več relacijami, $C := MPX(\mathcal{G})$ in $r : V \to W$ dodelitev vlog. Potem velja:

1. *Če je r regularna za C, potem je regularna za $\mathcal{G}$.*
2. *Če je r krepko strukturna za C, potem je krepko strukturna za $\mathcal{G}$.*

Polgrupa grafa

Definicija

Naj bosta Q in R binarni operaciji na V.

$$QR := \{(u,v) \mid \exists w \in V,\ \textit{da je } (u,w) \in Q \textit{ in } (w,v) \in R\}$$

je ***(Boolov) produkt*** *Q z R.*

Definicija

Naj bo $\mathcal{G} = (V, \mathcal{E})$ graf (z več relacijami). ***Polgrupa****, inducirana z $\mathcal{G}$, je definirana z*

$$S(\mathcal{G}) := \{E_1 \dots E_k \mid k \in \mathbb{N},\ E_1, \dots, E_k \in \mathcal{E}\}.$$

Polgrupa grafa

Definicija

Naj bo $\mathcal{G} = (V, \mathcal{E})$ *graf z več relacijami in* $r : V \to W$ *dodelitev vlog. Za* $Q \in S(\mathcal{G})$ *je* $r_{rel}(Q)$ *relacija na* W*, definirana z*

$$r_{rel}(Q) := \{(r(u), r(v)) \mid (u, v) \in Q\} .$$

$r_{rel}(Q)$ *imenujemo* ***relacija, inducirana*** *s* Q *in* r.

Lema

Naj bo $\mathcal{G} = (V, \mathcal{E})$ *graf z več relacijami,* $Q, R \in S(\mathcal{G})$ *in* $r : V \to W$ *dodelitev vlog, ki je regularna glede na* Q *in* R*. Potem je* $r_{rel}(QR) = r_{rel}(Q) r_{rel}(R)$.

Polgrupa grafa

Izrek

Naj bo $\mathcal{G} = (V, \mathcal{E})$ *graf z več relacijami in* $r : V \to W$ *dodelitev vlog. Potem velja:*

1. *Če je* r *regularna glede na* $\mathcal{E}$, *potem je regularna glede na poljubno relacijo iz* $S(\mathcal{G})$.
2. *Če je* r *krepko strukturna glede na* $\mathcal{E}$, *potem je krepko strukturna glede na poljubno relacijo iz* $S(\mathcal{G})$.

Izrek

Naj bo $\mathcal{G} = (V, \mathcal{E})$ *graf z več relacijami. Če je* $r : V \to W$ *regularna dodelitev vlog z grafom vlog* $\mathcal{R} = (W, \mathcal{F})$, *potem je* $r_{rel} : S(\mathcal{G}) \to S(\mathcal{R})$ *surjektiven homomorfizem polgrup.*

Izrek

Naj bo $\mathcal{G} = (V, \mathcal{E})$ *graf z več relacijami. Če je* $r : V \to W$ *krepko strukturna dodelitev vlog z grafom vlog* $\mathcal{R} = (W, \mathcal{F})$*, potem je* $r_{rel} : S(\mathcal{G}) \to S(\mathcal{R})$ *izomorfizem polgrup.*

Winship-Pattisonova ekvivalenca vlog

Definicija

Naj bo $\mathcal{G} = (V, \mathcal{E})$ graf z več relacijami. Ekvivalenčna relacija $\sim$ na V je ***šibka ekvivalenca vlog*** *grafa $\mathcal{G}$, če za vsak $u, v, w \in V$ in $E \in \mathcal{E}$ iz $u \sim v$ sledi:*

- $uRw \;\Rightarrow \exists x: \; vRx$,
- $wRu \;\Rightarrow \exists x: \; xRv$.

Definicija

Naj bo $\mathcal{G} = (V, \mathcal{E})$ graf z več relacijami in $S := S(\mathcal{G})$ njegova polgrupa. Ekvivalenčna relacija $\sim$ na V je ***kompozicijska ekvivalenca vlog*** *za $\mathcal{G}$, če je šibka ekvivalenca vlog grafa z več relacijami (V, S).*

Winship-Pattisonova ekvivalenca vlog

Definicija

Naj bo $\mathcal{G} = (V, \mathcal{E})$ graf z več relacijami in $C = (V, \mathcal{M}) := MPX(\mathcal{G})$ njegov mnogoteren graf. Ekvivalenčna relacija $\sim$ na V je ***sveženjska ekvivalenca vlog*** *za graf $\mathcal{G}$, če je šibka ekvivalenca vlog grafa C.*

Definicija

Naj bo $\mathcal{G} = (V, \mathcal{E})$ graf z več relacijami. Ekvivalenčna relacija $\sim$ na V je ***lokalna ekvivalenca vlog*** *ali* ***Winship-Pattisonova ekvivalenca vlog****, če je sveženjska ekvivalenca vlog za graf več relacijami $(V, S(\mathcal{G}))$.*