Napredni koncepti centralnosti

Blažka Hunski, Barbara Ikica, Ana Špela Hodnik

Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

19. april 2012

Normalizacija

Norma vektorja nenegativnih centralnih indeksov:

$$\|\mathbf{c_X}\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} |\mathbf{c_{X_i}}|^p\right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max_{i=1,\ldots,n} \left\{|\mathbf{c_{X_i}}|\right\}, & p = \infty. \end{cases}$$

Konkurenca in Antikonkurenca

Slika: Konkurenca in Antikonkurenca

Konkurenca in Antikonkurenca

Naj bo G povezan neusmerjen graf na n vozliščih. Za par vozlišč u in v $\gamma_u(v)$ določa število vozlišč, ki so bližje u kot v:

$$\gamma_u(v) = |\{w \in V; d(u,w) < d(v,w)\}| .$$

Število strank vozlišča u je

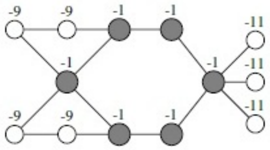
$$\gamma_u(v) + \frac{1}{2}(n - \gamma_u(v) - \gamma_v(u)) = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}(\gamma_u(v) - \gamma_v(u)).$$

Konkurenca in Antikonkurenca

Definiramo

$$f(u,v) = \gamma_u(v) - \gamma_v(u).$$

$$c_f(u) = \min\left\{f(u,v); v \in V - u\right\}.$$



Slika: Primer centroidne centralnosti

Normalizacija

Normalizacija splošnih centralnih indeksov:

$$\mathbf{c}'_{\mathbf{X_i}} = \begin{cases} \mathbf{c_{X_i}}/(\sum_{j:c_{X_j}>0} \left|\mathbf{c_{X_j}}\right|^p)^{1/p}, & \mathbf{c_{X_i}} > 0, \\ 0, & \mathbf{c_{X_i}} = 0, \\ \mathbf{c_{X_i}}/(\sum_{j:c_{X_j}<0} \left|\mathbf{c_{X_j}}\right|^p)^{1/p}, & \mathbf{c_{X_i}} < 0. \end{cases}$$

Primerjava med različnimi grafi

Naj bo $\mathcal{G}_n$ množica povezanih grafov $G = (V, E)$ z n vozlišči.
Centralnostne indekse $\mathbf{c_{X_i}}$ normaliziramo takole:

$$\mathbf{c''_{X_i}} = \frac{\mathbf{c_{X_i}}}{\mathbf{c^*_X}},$$

kjer je $\mathbf{c^*_X} = \max_{G\in\mathcal{G}_n}\max_{i\in V(G)}\mathbf{c_{X_i}}$.

Zgledi točkovnih centralnosti

1. Sosedska centralnost

$$\mathbf{c^*}_{\mathbf{D}} = n - 1$$

2. Centralnost posrednika na najkrajši poti

$$\mathbf{c^*}_{\mathbf{B}} = \frac{n^2 - 3n + 2}{2}$$

3. Bližinska centralnost

$$\mathbf{c^*}_{\mathbf{C}} = (n - 1)^{-1}$$

4. Ekscentrična centralnost

$$\mathbf{c^*}_{\mathbf{E}} = 1$$

Štiri dimenzije centralnega indeksa

Motivacija

Štiri dimenzije centralnega indeksa

Izbira dimenzij?

- Kategorija in **osnovni izraz**
- **Operator izraza**
- **Personalizacija**
- **Normalizacija**

Prva dimenzija: osnovni izraz

Klasifikacija v štiri kategorije

- Dosegljivost
- Količina pretoka
- Vitalnost
- Povratnost

Osnovni izraz: **razdalja** $d(u, v)$

Zgledi

- **Sosedska centralnost**: $\boxed{c_D(u) = \deg(u)}$
- **Ekscentrična centralnost**: $\boxed{c_E(u) = \frac{1}{\max\{d(u,v)\ :\ v \in V\}}}$
- **Bližinska centralnost**: $\boxed{c_C(u) = \frac{1}{\sum_{v \in V} d(u,v)}}$

Zgledi

- Bližinska centralnost v naključnem sprehodu (**centralnost Markova**):

$$\boxed{c_M(v) = \frac{n}{\sum_{s \in V} m_{sv}}}, \; m_{sv} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{sv}^{(n)}$$

Osnovni izraz: **količina pretoka** $f_{st}(x)$

Zgledi

- **Obremenitvena centralnost**: $\boxed{c_S(v) = \sum_{s \neq v \in V} \sum_{t \neq v \in V} \sigma_{st}(v)}$
- **Centralnost posrednika na najkrajši poti**:
$\boxed{c_B(v) = \sum_{s \neq v \in V} \sum_{t \neq v \in V} \delta_{st}(v)}$, $\delta_{st}(v) = \frac{\sigma_{st}(v)}{\sigma_{st}}$

Osnovni izraz: **vitalnostni indeks** x : $\nu(G,x) = f(G) - f(G\backslash\{x\})$, $f : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$, $G \in \mathcal{G}$.

Zgledi

- **Vitalnost posrednika maksimalnega pretoka**:

$$\boxed{c_{mf}(v) = \sum_{s,t\in V, v\neq s, v\neq t, f_{st}>0} \frac{f_{st}(v)}{f_{st}}}$$

Osnovni izraz: **implicitna definicija** $c(v_i) = f(c(v_1), \ldots, c(v_n))$

Zgledi

- **Katzev indeks stanja**: $\boxed{c_K(i) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \alpha^k (A^k)_{ji}}$

Druga dimenzija: operator izraza

Zgledi

- Maksimum
- Vsota
- Povprečna vrednost
- Varianca

Tretja dimenzija: personalizacija

Zgledi

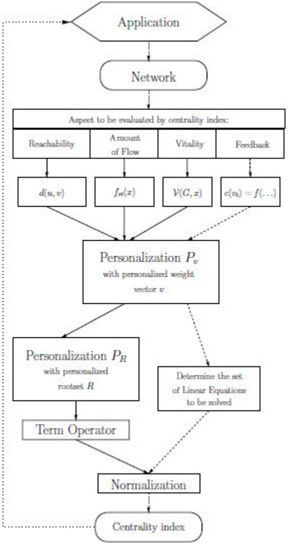
- operator P_v
- operator P_R , npr. **ciljna relativna centralnost posrednika na najkrajši poti**: $\boxed{c_{tRBC}(v) = \sum_{s \in V} \sum_{r \in R} \delta_{sr}(v)}$

Četrta dimenzija: normalizacija

Neodvisnost dimenzij

- Dimenzije: **osnovni izraz**, **operator izraza**, **personalizacija**, **normalizacija**
- Neodvisnost in nepopolnost

Konstrukcija centralnega indeksa



1. Vprašanje $\rightarrow$ kategorija + osnovni izraz
2. Določitev modela
3. Personalizacija P_v
4. Personalizacija P_R + izbira operatorja / Določitev sistema enačb
5. Normalizacija

Aksiomatizacija

Ali obstajajo neke splošne lastnosti, katerim naj bi zadoščala centralnost?

- Aksiomatizacija centalnega indeksa, ki temelji na razdalji.
- Aksiomatizacija povratne centalnosti.

- Dodajanje povezave (u, v):
  Naj bosta u in $v \in V(G)$ in $u \neq v$, kjer velja $(u, v) \notin E(G)$. Graf $H = (V(G), E(G) \cup \{u, v\})$ dobimo iz grafa G, tako da dodamo povezavo (u, v).
- Premik povezave (u, v):
  Naj bodo u, v in $w \in V(G)$ in $u \neq v \neq w$ taka, da $(u, v) \in E(G)$ in $(u, w) \notin E(G)$. Potem graf $H = (V(G), (E(G) \setminus \{(u, v)\}) \cup \{u, w\})$ dobimo s premikom (u, v) v povezavo (u, w). Ko premaknemo povezavo, mora graf ostati povezan.

Oznake

- Naj bo $\mathcal{G}_n$ razred neusmerjenih povezanih grafov na n vozliščih.
- $c : V(G) \to \mathbb{R}_0^+$.
- $\mathcal{S}_c(G) = \{u \in V(G) : \forall v \in V(G) \quad c(u) \geq c(v)\}$.

Sabadussijeva definicija

Definicija

Funkcijo c imenujemo ***vozliščna centralnost*** *na $G \in \mathcal{G}'_n \subseteq \mathcal{G}_n$ ter $\mathcal{G}'_n$ imenujemo* **c-*dopustna*** *natanko tedaj ko veljajo naslednji pogoji:*

1. *$\mathcal{G}'_n$ je zaprta za izomorfizme.*
2. *Če je $G = (V(G), E(G)) \in \mathcal{G}'_n$, $u \in V(G)$ in H dobimo, ko prestavimo ali dodamo povezavo v grafu G do vozlišča u, potem velja $H \in \mathcal{G}'_n$.*
3. *Če velja $G \cong_\phi H$ potem velja $c_G(u) = c_H(\phi(u))$ za $\forall u \in V(G)$.*
4. *Naj bo $u \in V(G)$ ter H dobimo iz grafa G z dodano povezavo do vozlišča u, potem velja $c_G(u) < c_H(u)$ in $c_G(v) \leq c_H(v)$ za $\forall v \in V(G)$.*
5. *Naj bo $u \in \mathcal{S}_c(G)$ in H tak graf, ki ga dobimo iz G, če bodisi premaknemo bodisi dodamo povezavo do vozlišča u. Potem velja $c_G(u) < c_H(u)$ in $u \in \mathcal{S}_c(H)$.*

Kishijeva definicija

Razliko centralnih vrednosti definiramo kot $\Delta_{uv}(w) = c_H(w) - c_G(w)$ za $\forall w \in V(G)$.

Definicija

Funkcijo c imenujemo ***vozliščna centralnost*** *natanko tedaj ko veljata naslednja dva pogoja*

1. $\Delta_{uv}(u) > 0$, *t.j.*, $c_G(u) < c_H(u)$.
2. *Za vsak par nesosednjih vozlišč u in v velja naslednje:*
   Če za $w \in V(G)$ velja $d(u,w) \leq d(v,w)$, velja tudi $\Delta_{uv}(u) \geq \Delta_{uv}(w)$.