Povezanost

Izbrana poglavja iz diskretne matematike

Miha Eržen, Zala Herga, Nika Šušterič, Nina Zupančič

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko
Finančna matematika

17. maj 2012

Algoritmi

Pokazali bomo algoritme, ki

- preverijo k-točkovno (k-povezavno) povezanost,
- izračunajo točkovno (povezavno) povezanost in
- izračunajo maksimum k-povezanih komponent danega grafa.

Osnovna definicija povezanosti

- povezan graf
- komponenta
- prerezna točka in prerezna povezava
- točkovna (κ) in povezavna (λ) povezanost
- po točkah k-povezan graf
- po povezavah k-povezan graf
- blok grafa

OSNOVNI IZREKI

Izrek

Za vse netrivialne grafe G velja:

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

Izrek [Menger, 1927]

Naj bo $G = (V, E)$ neusmerjen graf in $P, Q \subseteq V$ podmnožici točk grafa. Potem je največje število po točkah disjunktnih poti med P in Q (oz. (P,Q)-poti) enako najmanjšemu številu točk, ki ločijo množici P in Q tj. najmanjši moči (P,Q)-prereza v G.

Mengerjev izrek

Naj bosta $s, t \in V$ $(s \neq t)$ nesosednji točki neusmerjenega grafa $G = (V, E)$. Potem je največje število po točkah disjunktnih (s,t)-poti v G enako najmanjši moči množice, ki loči točki s in t.

Izrek

Največje število po poteh disjunktnih (s,t)-poti v G je enako najmanjšemu številu povezav, ki ločijo s in t v G.

Globalni Mengerjev izrek [Whitney, 1932]

Naj bo $G = (V, E)$ (netrivialen) graf in k, l pozitivni števili.

- Graf G je k-povezan natanko takrat, ko vsebuje k po točkah disjunktnih poti med poljubnima dvema točkama.
- Graf G je po povezavah l-povezan natanko takrat, ko vsebuje l po povezavah disjunktnih poti med poljubnima dvema točkama.

Izrek

Maksimum povezanosti (po točkah/povezavah) na grafu z n točkami in m povezavami je

$$\begin{matrix} \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor \;, & \text{če } m \geq n-1 \\ 0 \;, & \text{sicer.} \end{matrix}$$

Minimum povezanosti (po točkah/povezavah) na grafu z n točkami in m povezavami je

$$\begin{matrix} m - \binom{n-1}{2} \;, & \text{če } \binom{n-1}{2} < m \leq \binom{n}{2} \\ 0 \;, & \text{sicer.} \end{matrix}$$

Izrek

Za vse grafe G=(V,E), z minimalno stopnjo $\delta(G) \geq \lfloor |V|/\ 2 \rfloor$, je povezanost po povezavah enaka minimalni stopnji grafa: $\lambda(G) = \delta(G)$.

Izrek

Dve različni k-(točkovni-)komponenti imata največ $k-1$ skupnih točk.

Izrek [Matula, 1968]

Za katerokoli fiksno naravno število $k \geq 1$ so k-povezavne-komponente grafa po točkah disjunktne.

Izrek [Mader, 1972]

Vsak graf s povprečno stopnjo vsaj $4k$ ima k-povezan podgraf.

Edmondov izrek

V usmerjenem multigrafu $G = (V, E)$, ki vsebuje točko r, je maksimalna vrednost paroma po povezavah disjunktnih vpetih dreves s korenom v vozlišču r enaka $\kappa_G(r)$, kjer $\kappa_G(r)$ označuje najmanjše število povezav, ki gredo iz S, pri čemer je S množica točk $S \subset V$, ki vsebuje r.

Izrek [Lovász, 1973]

Naj bo $v \in V$ točka grafa $G = (V, E)$. Če $\lambda_G(v, w) \leq \lambda_G(w, v)$ za vse točke $w \in V$, potem $d^+(v) \leq d^-(v)$.

Ta izrek lahko uporabimo kot dokaz Kotzig-ove domneve.

Kotzigov izrek

Za usmerjen graf G, je $\lambda_G(v, w)$ enaka $\lambda_G(w, v)$ za vse $v, w \in V$ samo v primeru, ko je graf pseudo-simetričen, to pomeni, da v vseh točkah velja, da je vhodna stopnja enaka izhodni: $d^+(v) = d^-(v)$.

Minimalni prerezi

V neusmerjenem uteženem grafu je vsota uteži na povezavah s krajišči v disjunktnih množicah točk X in Y definirana z $w(X, Y)$. Za usmerjene grafe je $w(X, Y)$ definirana podobno, le da tu štejejo le uteži povezav, ki vodijo iz X v Y. Prerez uteženega grafa $G = (V, E)$ je množica točk $\emptyset \subset S \subset V$, njegova teža pa je $w(S, V \setminus S)$. V neuteženem grafu je teža prereza enaka številu povezav iz S v $V \setminus S$.

Definicija

Minimalen prerez je tak prerez S, da za vse ostale prereze T velja

$$w(S, V \setminus S) \leq w(T, V \setminus T).$$

Minimalni prerezi vseh parov točk

- Izračun $n(n-1)/2$ pretočnih problemov
- Gomory in Hu: $n-1$ maksimalnih pretokov
  - *ekvivalentno pretočno drevo*
  - *Gomory-Hu prerezno drevo*
- *Gusfield, Stoer in Wagner, ...*

Lastnosti minimalnega prereza v neusmerjenih grafih

- število minimalnih prerezov v fiksnem neusmerjenem grafu je polinomsko v $|V|$
- podatkovna struktura *kaktus*
- $w(X, Y)$ označuje vsoto uteži na povezavah s krajišči v disjunktnih množicah točk X in Y.
- λ_G označuje težo minimalnega prereza

Lema

Naj bo S *minimalni prerez v* $G = (V, E)$. *Potem za vse* $\emptyset \neq T \subset S$ *velja:* $w(T, S \setminus T) \geq \frac{\lambda}{2}$.

Lema

Naj bosta $A \neq B$ *dva minimalna prereza, taka da je tudi* $T := A \cup B$ *minimalni prerez. Potem* $w(A, \bar{T}) = w(B, \bar{T}) = w(A \setminus B, B) = w(A, B \setminus A) = \frac{\lambda}{2}$.

Prekrižni prerez [Crossing cut]

Definicija

Paru $\langle S_1, S_2 \rangle$ pravimo prekrižni prerez, če sta S_1, S_2 dva minimalna prereza in niso prazne niti $S_1 \cap S_2, S_1 \setminus S_2, S_2 \setminus S_1$ niti $\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2$.

Lema

Naj bo $\langle S_1, S_2 \rangle$ prekrižni prerez in $A = S_1 \cap S_2$, $B = S_1 \setminus S_2$, $C = S_2 \setminus S_1$ in $D = \bar{S}_1 \cap \bar{S}_2$. Potem:

1. *A, B, C, in D so minimalni prerezi*
2. $w(A, D) = w(B, C) = 0$
3. $w(A, B) = w(B, D) = w(D, C) = w(C, A) = \frac{\lambda}{2}$.

Krožna particija [Circular partition]

Definicija

Krožna particija je particija množice V na $k \geq 3$ disjunktnih množic $V_1, V_2, \ldots, V_k$, tako da:

- 1. $w(V_i, V_j) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2}, & |i-j| = 1 \ mod \ k \\ 0, & sicer \end{cases}$

  2. *Če je S minimalni prerez, potem:*
     1. *S ali $\bar{S}$ je prava podmnožica neke V_i ali*
     2. *Krožna particija je dopolnjenje particije, definirane z minimalnim prerezom S. Z drugimi besedami: minimalni prerez je unija nekaterih množic krožne particije.*

- za $1 \leq a \leq b \leq k$
  $(\cup_{i=a}^{b} V_i) := S \rightarrow$ Prerezi krožne particije

Kompatibilnost

Definicija

Dve različni krožni particiji $P := \{U_1, ..., U_k\}$ *in* $Q := \{V_1, ..., V_k\}$ *sta kompatibilni, če obstajata enolična* r *in* s, $1 \leq r, s \leq k$ *taka, da za vse* $i \neq r : U_i \subseteq V_s$ *in za vse* $j \neq s : V_j \subseteq U_r$.

Lema

Vse različne krožne particije so paroma kompatibilne.

Lema

Če so S_1, S_2 in S_3 paroma prekrižni prerezi, potem $S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \emptyset$.

Lema

Če so S_1, S_2 in T minimalni prerezi, taki da $S_1 \subset S_2$, $T \not\subset S_2$ in je $\langle S_1, T \rangle$ prekrižni prerez, potem so
$A := (S_2 \setminus S_1) \setminus T$, $B := S_1 \setminus T$, $C := S_1 \cap T$ in $D := (S_2 \setminus S_1) \cap T$ minimalni prerezi in
$w(A, B) = w(B, C) = w(C, D) = \frac{\lambda}{2}$ in
$w(A, C) = w(A, D) = w(B, D) = 0$.

Definiramo

- $\mathcal{F}_{S_1,\ldots,S_k}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} = \bigcap_{i=1}^{k} \begin{cases} S_i & \text{if} \quad \alpha_i = 1 \\ \bar{S}_i & \text{if} \quad \alpha_i = 0 \end{cases}$
- in $\mathcal{F}_{S_1,\ldots,S_k} = \left(\bigcup_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k \in \{0,1\}^k} \mathcal{F}_{S_1,\ldots,S_k}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} \right) \setminus \{\emptyset\}.$

Lema

Naj bo $\langle S_1, S_2 \rangle$ prekrižni prerez in $A \in \mathcal{F}_{S_1,S_2}$. Izberimo $B \in \mathcal{F}_{S_1,S_2}$ tak, da $w(A,B) = \frac{\lambda}{2}$. Za vse prekrižne prereze $\langle B, T \rangle$ velja:
$w(A, B \cap T) = \frac{\lambda}{2}$ ali
$w(A, B \cap \bar{T}) = \frac{\lambda}{2}$.

Posledica

prekrižni prerez razdeli točke osnovnega grafa na štiri minimalne prereze. Lema 3 (3) nam zagotavlja, da za vsakega od štirih minimalnih prerezov A obstajajo dva ali trije preostali minimalni prerezi B,C, taki da $w(A,B) = w(A,C) = \frac{\lambda}{2}$. *Čeprav sta lahko morda množici B in C še naprej razdeljeni na manjše dele s crossing cuts, obstajata vedno dva disjunktna minimalna prereza* $X \subseteq B$ *in* $Y \subseteq C$ *z* $w(A,X) = w(A,Y) = \frac{\lambda}{2}$.

Izrek

V grafu $G = (V, E)$ za vsako particijo P množice točk V na 4 disjunktne množice glede na prekrižni prerez v G, obstaja krožna particija v G, ki je izpopolnitev P.

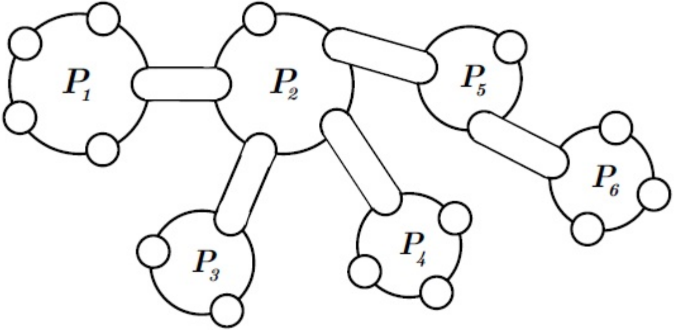
Lema

Graf $G = (V, E)$ ima $\mathcal{O}\left(\binom{|V|}{2}\right)$ minimalnih prerezov in ta meja je natančna. To pomeni, da ima graf lahko w $\left(\binom{|V|}{2}\right)$ minimalnih prerezov.

Predstavitev minimalnih prerezov s kaktusom

- Množica $\mathcal{S}$ se imenuje *laminarna*, če za vsak par množic $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ velja, da sta ali S_1 in S_2 disjunktni ali pa je S_1 vsebovana v S_2 (oz. obratno).
- kaktus za $G = (V, E)$ brez krožnih particij
- kaktus za $G = (V, E)$ z eno krožno pariticijo
- kaktus za $G = (V, E)$ z več krožnimi particijami

Primer kaktusa



Algoritmi povezanosti na grafih

- Algoritmi, ki temeljijo na pretoku,
- Algoritmi, ki ne temeljijo na pretoku

Definicija

Omrežju pravimo **omrežje z enotno kapaciteto** *(ali* $0-1$ *omrežje), če imajo vse povezave kapaciteto* 1*. Omrežje z enotno kapaciteto je* **tipa 1**, *če ne vsebuje vzporednih povezav. Pravimo, da je* **tipa 2**, *kadar sta za vsako točko* v, $(v \neq s,\ v \neq t)$ *vhodna stopnja* $d^-(v)$ *ali izhodna stopnja* $d^+(v)$ *enaki* 1.

Lema

1. *Za omrežja z enotno kapaciteto je časovna zahtevnost izračuna maksimalnega pretoka z uporabo Dinitzovega algoritma enaka* $\mathcal{O}(m^{3/2})$.
2. *Za omrežja z enotno kapaciteto tipa 1 je časovna zahtevnost izračuna maksimalnega pretoka z uporabo Dinitzovega algoritma enaka* $\mathcal{O}(n^{2/3}m)$.
3. *Za omrežja z enotno kapaciteto tipa 2 je časovna zahtevnost izračuna maksimalnega pretoka z uporabo Dinitzovega algoritma enaka* $\mathcal{O}(n^{1/2}m)$.

Even: metoda za izračun $\kappa_G(s,t)$

Iz danega grafa $G = (V, E)$, ki ima n točk in m povezav, konstruiramo usmerjen graf $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$ z $|\bar{V}| = 2n$ in $|\bar{E}| = 2m + n$ tako, da vsako točko $v \in V$ zamenjamo z dvema točkama $v^{'}, v^{''} \in \bar{V}$, povezanima z (notranjo) povezavo $e_v = (v^{'}, v^{''}) \in \bar{E}$. Vsako povezavo $e = (u, v) \in E$ zamenjamo z dvema (zunanjima) povezavama $e^{'} = (u^{''}, v^{'}), e^{''} = (v^{''}, u^{'}) \in \bar{E}$.
$\kappa(s,t)$ sedaj izračunamo kot maksimalni pretok grafa $\bar{G}$ od izhodišča $s^{''}$ do konca $t^{'}$ z enotnimi kapacitetami na vseh povezavah.

$\Rightarrow$ Časovna zahtevnost izračuna maksimalnega pretoka je v tovrstnem grafu enaka $\mathcal{O}(\sqrt{n}m)$.

Povezanost po točkah

Algoritem 1: Even & Tarjan: povezanost po točkah

Data: (Neusmerjen) graf $G = (V, E)$
Result: $\kappa(G)$

```
κ_min ← n − 1
i ← 1
while i ≤ κ_min do
    for j ← i + 1 to n do
        if i > κ_min then
            break
        else if {v_i, v_j} ∉ E then
            izračunaj κ_G(v_i, v_j) z uporabo MaxFlow algoritma
            κ_min ← min{κ_min, κ_G(v_i, v_j)}
return κ_min
```

Časovna zahtevnost fukncije pretoka: $\mathcal{O}((n - \delta - 1)(\kappa + 1))$.

Skupna časovna zahtevnost algoritma: $\mathcal{O}(\sqrt{n}m^2)$.

Povezanost po točkah

Lema

Če točka v pripada vsem minimalnim prereznim množicam točk, potem obstajata za vsak minimalni prerez po točkah S dve točki $l \in L_S$ in $r \in R_S$, ki sta sosednji z v.

Dokaz.

Predpostavimo, da je v vsebovana v vseh minimalnih prereznih množicah točk grafa G. Imejmo particijo množice točk V, ki je inducirana z minimalno prerezno množico točk S s komponentama L ("leva" stran) in pripadajočo "desno" stranjo R. Vsaka stran mora vsebovati vsaj enega od sosedov točke v, sicer točka v ne bi bila potrebna za razbitje grafa na dva dela. Pravzaprav mora vsaka stran, ki ima več kot eno točko, vsebovati dva soseda, sicer bi z zamenjavo točke v z edinim sosedom dobili minimalni prerez brez v, kar pa je v protislovju s predpostavko. □

Z upoštevanjem teh premislekov sta Esfahanian in Hakimi izboljšala prejšnji algoritem in dosegla časovno zahtevnost funkcije pretoka $\mathcal{O}(n - \delta - 1 + \kappa(2\delta - \kappa - 3)/2)$.

Povezanost po povezavah

Časovna zahtevnost izračuna maksimalnega pretoka je enaka $\mathcal{O}(min\{m^{3/2}, n^{2/3}m\})$ (omrežje tipa 1).

Lema

Naj bo S minimalni prerez po povezavah grafa $G = (V, E)$ in naj bo $L, R \subset V$ particija množice točk, taka, da sta L in R ločeni s S. Če je $\lambda(G) < \delta(G)$, potem vsaka komponenta $G - S$ vsebuje več kot $\delta(G)$ točk, t.j. $|L| > \delta(G)$ in $|R| > \delta(G)$.

Posledica

Če je $\lambda(G) < \delta(G)$, potem vsaka komponenta $G - S$ vsebuje točko, ki ni incidenčna točka nobene povezave v S.

Lema

Spet predpostavimo, da je $\lambda(G) < \delta(G)$. Če je T vpeto drevo grafa G, potem vsaka komponenta $G - S$ vsebuje vsaj eno točko, ki ni list drevesa T (t.j. točke, vsebovane v T, ki niso listi, tvorijo $\lambda -$ pokritje).

Vpeto drevo

Algoritem 2: Esfahanian & Hakimi: računanje vpetega drevesa

Data: (Neusmerjen) graf $G = (V, E)$

Result: Vpeto drevo T z listom in notranjo točko v L in R

Izberi $v \in V$

$T \leftarrow$ vse povezave, ki so incidenčne točki v

while $|E(T)| < n - 1$ **do**

  izberi list w v T, tako da je za vse liste r v T:

  $|N(w) \cap (V - V(T))| \geq |N(r) \cap (V - V(T))|$

  $T \leftarrow T \cup G[w \cup \{N(w) \cap (V - V(T))\}]$

return T

Povezanost po povezavah

Algoritem 3: Esfahanian & Hakimi: povezanost po povezavah

Data: (Neusmerjen) graf $G = (V, E)$

Result: $\lambda(G)$

Konstruiraj vpeto drevo T z uporabo Algoritma 4

P naj označuje manjšo izmed obeh množic, listov ali notranjih vozlišč T

Izberi točko $u \in P$

$c \leftarrow min\{\lambda_G(u, v) : v \in P \backslash \{u\}\}$

$\lambda \leftarrow min(\delta(G), c)$

return λ

Dominantna množica

Lema

V primeru, da je $\lambda(G) < \delta(G)$, je vsaka dominantna množica grafa G tudi njegovo $\lambda-$ pokritje.

Algoritem 4: Matula: računanje dominantne množice

Data: (Neusmerjen) graf $G = (V, E)$

Result: Dominantna množica D

Izberi $v \in V$

$D \leftarrow \{v\}$

while $V \setminus (D \cup N(D)) \neq \emptyset$ **do**

  Izberi točko $w \in V \setminus (D \cup N(D))$

  $D \leftarrow D \cup \{w\}$

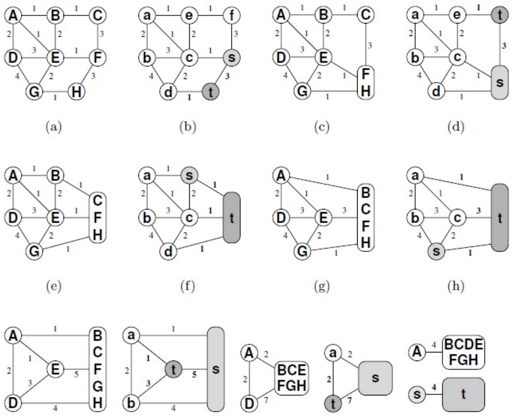
return D

Minimalni prerez

Algoritem 5: Stoer & Wagner: računanje minimalnega prereza(prereza z najmanjšo kapaciteto)

Data: Neusmerjen graf $G = (V, E)$
Result: Minimalni prerez C_{min}, ki ustreza $\lambda(G)$
Naključno izberi začetno točko a
$C_{min} \leftarrow$ nedefiniran
$V' \leftarrow V$
while $|V'| > 1$ **do**
  $A \leftarrow \{a\}$
  while $A \neq V'$ **do**
    A dodaj najmočneje povezano točko
    Prilagodi kapacitete med A in točkami $V' \backslash A$
  $C :=$ prerez V', ki ločuje zadnjo dodano točko v A od preostalega grafa
  if $C_{min} = nedefiniran\ or\ w(C) < w(C_{min})$ **then**
    $C_{min} \leftarrow C$
  Združi točki, ki sta bili zadnji dodani v A
return C_{min}

Minimalni prerez



(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i) (j) (k) (l) (m)

2-povezane komponente

Lema: Sledimo opisani metodi za izračunavanje vrednosti low in num z metodo pregleda v globino po grafu G. Točka *v* je prerezna točka natanko tedaj, ko velja eden izmed spodnjih pogojev:

1. če je v začetek drevesa, najdenega z metodo pregleda v globino in je vsebovan v vsaj dveh povezavah drevesa najdenega z metodo pregleda v globino,
2. če v ni začetek drevesa, vendar obstaja otrok w točke v tak, da velja $low[w] \geq num[v]$.

Močno povezane komponente

Povezave $e = (v, w)$, ki jih odkrijemo z metodo pregleda v globino lahko razdelimo v naslednje kategorije:

1. Vse povezave, ki vodijo do neoznačenih točk imenujemo »drevesne povezave« (vsebovane so v drevesih gozda odkritega z metodo pregleda v globino).
2. Povezave, ki vodijo do točke w, ki je bila že označena v prejšnjem koraku metode lahko razdelimo v naslednje razrede:
    - če je $num[w] > num[v]$ rečemo, da je povezava e »naprejšnja povezava« (forward edge),
    - če je w sorodna od v v drevesu najdenem z pregledom v globino (metoda DFS) rečemo povezavi e »nazajšnja povezava« (backward edge),
    - drugače pa povezavo e imenujemo »križna povezava« (cross edge), saj je usmerjena od enega poddrevesa k drugemu.

Močno povezane komponente

Točka v je koren močne komponente natanko tedaj, ko veljata oba naslednja pogoja:

1. Ne obstaja nazajšnja povezava od v ali potomca v do prednika točke v.
2. Ne obstaja nobena križna povezava (v, w) od točke v ali njenih potomcev do točke w, da bi bil koren močne komponente točke w prednik točke v.

To je ekvivalentno ko je $lowlink[v] = num[v]$.

3-povezane komponente

Definicija: Naj bo $G = (V, E)$ 2-povezan (multi)graf. Točki $a, b \in V$ imenujemo ločevalni par (separation pair) grafa G, če podgraf iz točk $V \setminus \{a, b\}$ ni povezan.

Definicija: Naj bo (a, b) ločevalni par dvojno povezanega multi grafa G in naj bodo ločevalni razredi $E_{1,\dots,k}$ razdeljeni v dve skupini $E' = \cup_{i=1}^{l} E_i$ in $E'' = \cup_{i=l+1}^{k} E_i$ ter naj vsebujejo vsaj dve povezavi. Grafa $G' = (V(E' \cup e), E' \cup e)$ in $G'' = (V(E'' \cup e), E'' \cup e)$, ki sta posledica razdelitve grafa na dve skupini povezav $[E', E'']$ in dodatne nove izmišljene povezave $e = (a, b)$, ki jo dodamo vsakemu »novemu« grafu, imenujemo razdeljena grafa (split graphs) in sta ponovno dvojno povezana. Če je operacijo »razbitje« grafov uporabimo rekurzivno na razdeljenih grafih lahko tako sestavimo graf G (ni nujno enolična rešitev).

3-povezane komponente

Lema: Naj bo $G = (V, E)$ 2-povezan multigraf z $|E| \geq 3$. Potem je celotno število povezav vsebovanih v vseh komponentah razdelitev omejeno z $3|E| - 6$.

Izrek: Naj bo G 2-povezan multigraf z SPQR drevesom T.

1. skeletni grafi drevesa T so 3-povezane komponente grafa G. P-vozlišča ustrezajo vezem, S-vozlišča poligonom in R-vozlišča 3-povezanim enostavnim grafom
2. med dvema vozliščema $\mu, \nu \in T$ obstaja povezava natanko tedaj, ko si pripadajoči 3-povezani komponenti delita skupno virtualno povezavo
3. velikost T, skupaj z vsemi skeletnimi grafi je linearna v z velikostjo G.