Spektralna teorija grafov

Izbrana poglavja iz diskretne matematike

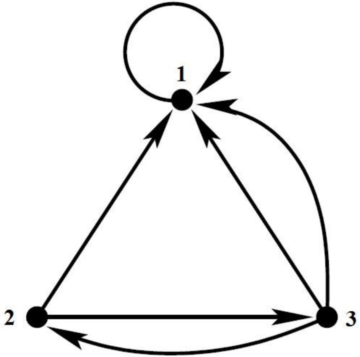
Katarina Stupica Jaka Špeh Teja Šegula Leon Lampret

Spekter grafa

Naj bo $G = (V, E)$ poljuben graf (lahko tudi usmerjen multigraf) z vozlišči $v_1, \ldots, v_n$. **Matrika sosednosti** $A = (a_{ij})_{i,j}$ ima elemente

$$a_{ij} := \text{večkratnost povezave } (v_i, v_j).$$

Spekter grafa je spekter njegove matrike sosednosti.



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Opombe

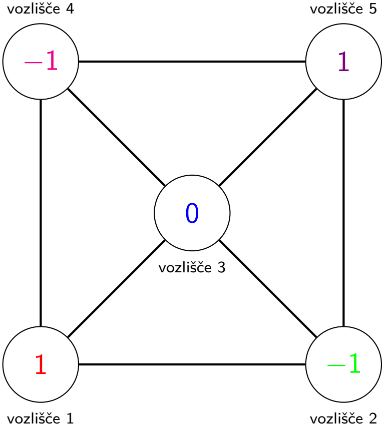
- Matrika sosednosti je odvisna od številčenja vozlišč v grafu, njen spekter pa ne.
- Če je graf neusmerjen in enostaven, je njegova matrika sosednosti simetrična, torej ima realne lastne vrednosti, ortonormirane lastne vektorje in se jo da diagonalizirati.
- Naj bo $\omega : V \to \mathbb{C}$ funkcija, ki vsakemu vozliščthan $i \in V$ priredi komponento x_i vektorja $x \in \mathbb{C}$. Velja

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \sum_{j \in N(i)} \omega(j).$$

  Potem je λ lastna vrednost matrike A natanko tedaj, ko obstaja neničelna funkcija $\omega : V \to \mathbb{C}$, za katero velja

$$\lambda\omega(i) = \sum_{j \in N(i)} \omega(j) \text{ za vsak } i \in V.$$

Primer



$$-2 \cdot 1 = -2 = -1 + 0 + -1$$

$$-2 \cdot -1 = 2 = 1 + 0 + 1$$

$$-2 \cdot 0 = 0 = 1 + -1 + -1 + 1$$

$$-2 \cdot -1 = 2 = 1 + 0 + 1$$

$$-2 \cdot 1 = -2 = -1 + 0 + -1$$

Trditev

Naj bo $G = (V, E)$ graf z n vozlišči in maksimalno stopnjo Δ. Naj ima njegova matrika sosednosti A lastne vrednosti $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$. Potem velja:

1. $\lambda_n \leq \Delta$.
2. Če je G unija disjunktnih grafov G_1 in G_2, potem je $\mathrm{s}(G) = \mathrm{s}(G_1) \cup \mathrm{s}(G_2)$.
3. G je dvodelen natanko tedaj, ko se lastne vrednosti A pojavljajo v takih parih λ, λ', da je $\lambda = -\lambda'$.
4. Če je G cikel, potem je $\mathrm{s}(G) = \{2\cos(\frac{2\pi k}{n});\ k = 1, \ldots, n\}$.
5. Če je G poln graf K_n, potem je $\lambda_1 = \cdots \lambda_{n-1} = -1$ in $\lambda_n = n - 1$.
6. Če je $G = K_{n_1,n_2}$, kjer je $n_1 + n_2 = n$, je $\lambda_1 = -\sqrt{n_1 n_2}, \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0, \lambda_n = \sqrt{n_1 n_2}$.

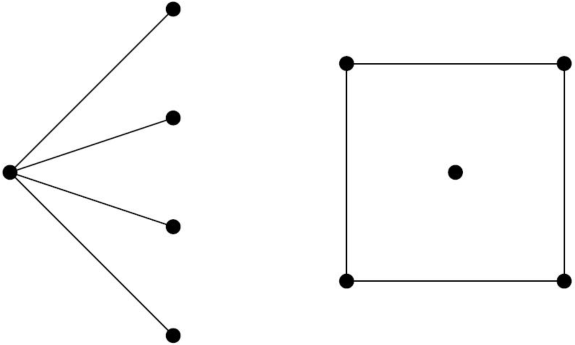
Trditev

Naj bo G usmerjen multigraf, ki ima lahko tudi zanke in A njegova matrika sosednosti z lastnimi vrednostmi λ_i. Potem velja:

1. Lastne vrednosti matrike A^k so λ_i^k.
2. $(A^k)_{ij} =$ število (i, j)-poti dolžine k.
3. $\sum_{i=1}^n \lambda_i =$ število zank v G.
4. $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 2 \cdot |E|$.
5. $\sum_{i=1}^n \lambda_i^3 = 6 \cdot$ število trikotnikov grafa G.

Izomorfnost

Če sta dva grafa izomorfna, potem morata imeti isti spekter. Kaj pa obratno? Ne velja nujno. Spodnja grafa imata enak spekter $\{-2, 0, 0, 0, 2\}$, nista pa izomorfna.



Laplaceova matrika

Naj bo $G = (V, E)$ neusmerjen multigraf (lahko tudi z zankami) z matriko sosednosti A. Naj bo $D = \mathrm{diag}(d(1), \ldots, d(n))$ diagonalna matrika stopenj vozlišč. **Laplaceova matrika** L je definirana kot $L := D - A$. Če je G enostaven neusmerjen graf, potem so elementi matrike L enaki

$$l_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{če } (i, j) \in E \\ d(i), & \text{če } i = j \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Na Laplaceovo matriko lahko pogledamo tudi drugače. **Orientacija** σ grafa G je preslikava, ki vsaki povezavi $e = (i, j)$ priredi smer, tako da pove, katero vozlišče je začetek povezave. **Incidenčna matrika** B orientiranega grafa (G, σ) ima elemente

$$b_{i,e} = \begin{cases} 1, & \text{če je } i \text{ začetek povezave } e \\ -1, & \text{če je } i \text{ konec povezave } e \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Neodvisno od izbire orientacije σ velja, da je $L = BB^T$.
Za vsak $x \in \mathbb{C}^n$ velja

$$x^T L x = x^T B B^T x = \sum_{i,j \in E} (x_i - x_j)^2.$$

Od tod sledi: λ je lastna vrednost matrike L natanko tedaj, ko obstaja neničelna funkcija (teža) $\omega : V \to \mathbb{C}$, da velja

$$\lambda\omega(i) = \sum_{j\in N(i)} (\omega(i) - \omega(j)) \text{ za vsak } i \in V.$$

Če to enačbo pogledamo za $i \in V$ z največjo težo, vidimo $\lambda\omega(i) = \sum_{j\in N(i)}(\omega(i) - \omega(j)) \geq 0$, torej so vse lastne vrednosti Laplaceove matrike nenegativne. Podobno dobimo, da je ena lastna vrednost enaka 0, njen lastni vektor pa je $\mathbf{1}$.

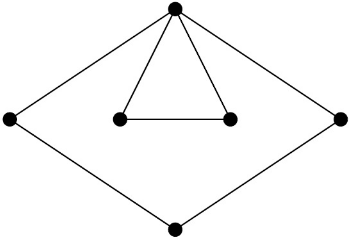
Trditev

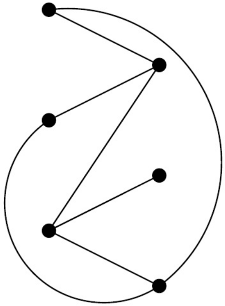
Naj ima graf G Laplaceovo matriko L. Potem velja:

1. Graf je sestavljen iz k povezanih komponent natanko tedaj, ko velja $\lambda_1(L) = \cdots = \lambda_k(L) = 0$ in $\lambda_{k+1}(L) > 0$.
2. Število vpetih dreves v grafu G je enako $\det(L_i)$, kjer je L_i podmatrika matrike L, kjer izbrišemo i-to vrstico in stolpec.
3. Število vpetih dreves je enako

$$\frac{1}{n} \prod_{i \geq 2} \lambda_i(L).$$

Primer grafov z istim spektrom glede na L





Normalizirana Laplaceova matrika

Matrika sosednosti prepozna dvodelnost grafa, Laplaceova matrika pa število povezanih komponent. Kaj pa, če želimo oboje? **Normalizirana Laplaceova matrika** $\mathcal{L}$ grafa G je definirana kot $\mathcal{L} = D^{-1/2}LD^{-1/2}$. Pri tem je $D^{-1/2}$ diagonalna matrika, kjer je na i-tem mestu $d(i)^{-1/2}$, če je $d(i) > 0$ in 0 sicer. Če je G enostaven graf, ima $\mathcal{L}$ elemente:

$$l_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{če } i = j \text{ in } d(i) > 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{d(i)d(j)}}, & \text{če } (i,j) \in E \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

λ je lastna vrednost matrike $\mathcal{L}$ natanko tedaj, ko obstaja neničelna funkcija $\omega : V \to \mathbb{C}$, da velja

$$\lambda\omega(i) = \frac{1}{\sqrt{d(i)}} \sum_{j \in N(i)} \left(\frac{\omega(i)}{\sqrt{d(i)}} - \frac{\omega(j)}{\sqrt{d(j)}}\right) \text{ za vsak } i \in V.$$

Trditev

Naj bo G graf z normalizirano Laplaceovo matriko $\mathcal{L}$. Potem velja:

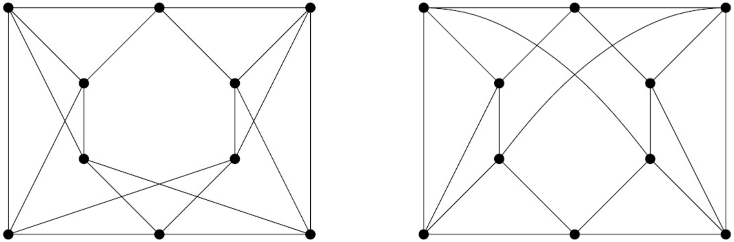
- $\lambda_1(\mathcal{L}) = 0, \lambda_n(\mathcal{L}) \leq 2$.
- G je dvodelen natanko tedaj, ko je za vsako lastno vrednost $\lambda(\mathcal{L})$ tudi $2 - \lambda(\mathcal{L})$ lastna vrednost matrike $\mathcal{L}$.
- Če je $\lambda_1(\mathcal{L}) = \cdots = \lambda_k(\mathcal{L}) = 0$ in $\lambda_{k+1}(\mathcal{L}) \neq 0$, potem ima G natanko k povezanih komponent.

Primerjava spektrov

Če je G d-regularen graf, potem lahko primerjamo spektre matrik A, L in $\mathcal{L}$. Če je $\mathrm{s}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, potem je $\mathrm{s}(L) = \{d - \lambda_n, \ldots, d - \lambda_1\}$ in $\mathrm{s}(\mathcal{L}) = \{1 - \frac{\lambda_n}{d}, \ldots, 1 - \frac{\lambda_1}{d}\}$.
V splošnem ni preprostega razmerja med spektri.
Naj bosta Δ in δ maksimalna in minimalna stopnja vozlišč v grafu G ter $\lambda_k(A)$ k-ta najmanjša lastna vrednost matrike A in $\lambda_{n+1-k}(L)$ k-ta največja lastna vrednost matrike L. Potem velja:

$$\delta - \lambda_k(A) \leq \lambda_{n+1-k}(L) \leq \Delta - \lambda_k(A).$$

Primer grafov z istim spektrom glede na A, L in $\mathcal{L}$



Numerične metode.

Če želimo uporabiti spekter matrike G, ga moramo izračunati.

Kako?

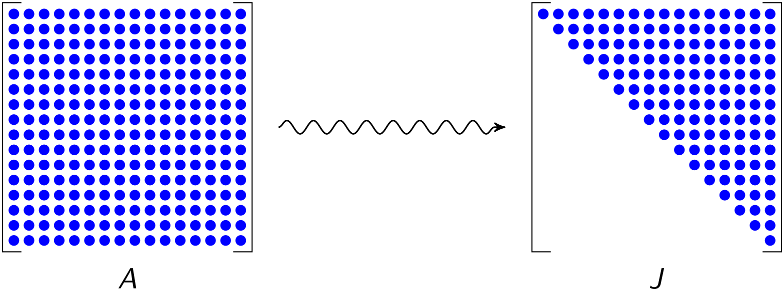
Uporabimo numerične metode.

Delimo jih na dva dela:

- numerične metode za “majhne” grafe (“majhne”, polne matrike),
- numerične metode za velika omrežja (velike, razpršene matrike).

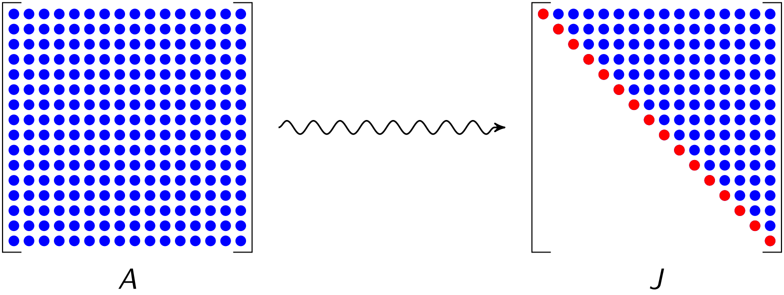
Numerične metode za "majhne" grafe

Cilj je spraviti matriko (grafa) v Shurovo formo $J = Q^{-T}AQ$ za neko unitarno matriko Q.

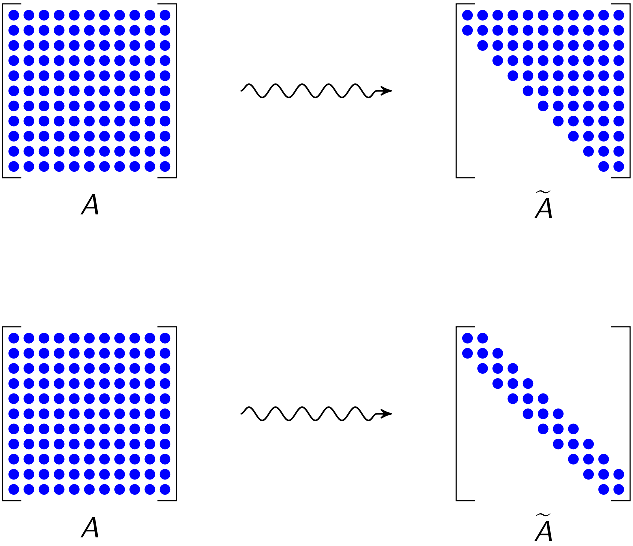


Numerične metode za “majhne” grafe

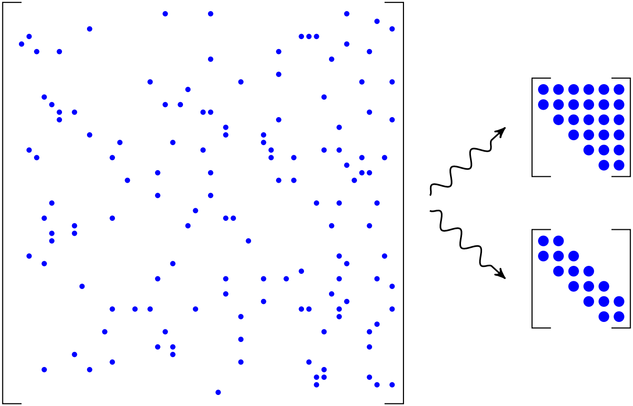
Cilj je spraviti matriko (grafa) v Shurovo formo $J = Q^{-T}AQ$ za neko unitarno matriko Q.



Postopek: $\widetilde{A} = P^{-1}AP$



Numerične metode za velika omrežja



Lanczosov algoritem

Naj bo x_1 poljuben normiran vektor.

$$\{x_1, Ax_1, A^2x_1, A^3x_1\} \rightsquigarrow \{x_1, x_2, x_3, x_4\}.$$

$$x_2 h_{21} = Ax_1 - \underbrace{x_1^T Ax_1}_{h_{11}} x_1,$$

$$x_3 h_{32} = Ax_2 - \underbrace{x_2^T Ax_2}_{h_{22}} x_2 - \underbrace{x_1^T Ax_1}_{h_{12}} x_1,$$

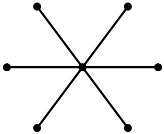
$$x_4 h_{43} = Ax_3 - \underbrace{x_3^T Ax_3}_{h_{33}} x_3 - \underbrace{x_2^T Ax_3}_{h_{23}} x_2.$$

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$$

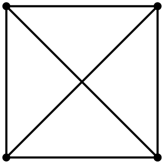
Podgrafi in operacije na grafih.

Spekter induciranega podgrafa

K_2



$K_{1,6}$



K_4

$\mathsf{s}(K_2) = \{-1, 1\}$

$\mathsf{s}(K_{1,6}) = \{-\sqrt{6},$

$0, 0, 0, 0, \sqrt{6}\}$

$\mathsf{s}(K_4) = \{-1, -1,$

$-1, 1\}$

Izrek

Naj bo G graf in $v \in V(G)$. Bodi $H := G - v$ (H je induciran podgraf G).

Z

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$$

označimo lastne vrednosti matrike sosednosti grafa G.

Z

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_{n-1}$$

pa označimo lastne vrednosti matrike sosednosti grafa H.

Velja

$$\lambda_i \leq \mu_i \leq \lambda_{i+1}, \forall i \in \{1, \ldots, n-1\}.$$

Primer P_n

Lastne vrednosti P_n so $\{2\cos(\frac{\pi k}{n+1}) \mid k = 1, 2, \ldots, n\}$.

P_5 $\quad -1.73 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 1.73$

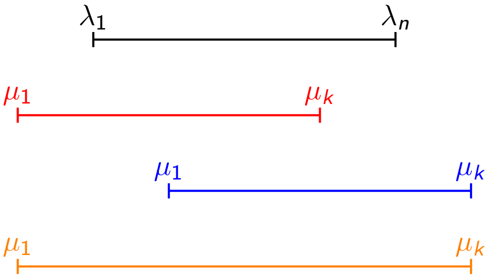
P_4 $\quad -1.61 \quad -0.61 \quad 0.61 \quad 1.61$

P_3 $\quad -1.41 \quad 0 \quad 1.41$

P_2 $\quad -1 \quad 1$

Posledica

Naj bosta G, H grafa z lastnimi vrednostmi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ in $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ ($k \leq n$) zaporedoma. Če $\mu_1 < \lambda_1$ ali $\lambda_n < \mu_k$, potem H ni induciran podgraf grafa G.



Problem

Imamo grafa G in H. Radi bi spremenili G tako, da bi spremenjeni G imel nekaj lastnih vrednosti grafa H.

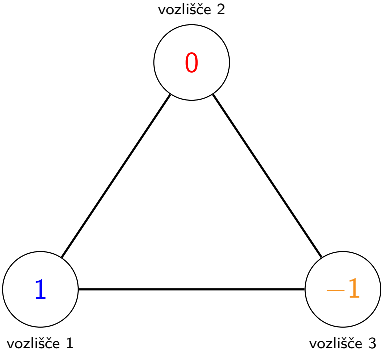
- Disjunktna unija (težava povezanost).
- Grafting.

Spomnimo se

Naj bo G graf in λ njegova lastna vrednost.

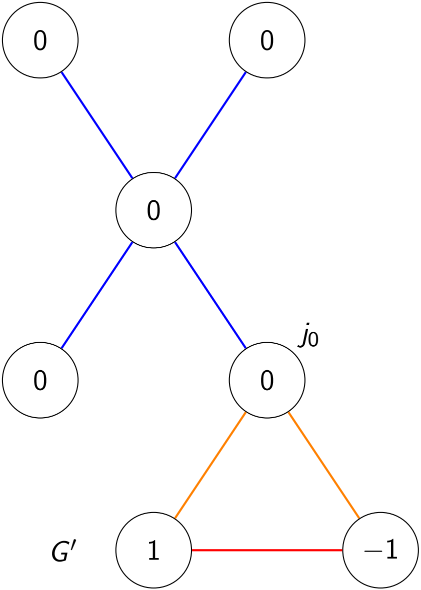
$$\omega : V(G) \to \mathbb{C}.$$

$$\lambda\omega(i) = \sum_{j \in \mathrm{N}(i)} \omega(j), \quad \forall i.$$



$$-1 \cdot 1 = -1 = 0 + -1,$$
$$-1 \cdot 0 = 0 = 1 + -1,$$
$$-1 \cdot -1 = 1 = 1 + 0.$$

Grafting primer



Zvezda $G = K_{1,4}$ ima lastne vrednosti $\{-2, 0, 0, 2\}$. Želimo dodati lastno vrednost -1, ki jo ima $H = K_3$.

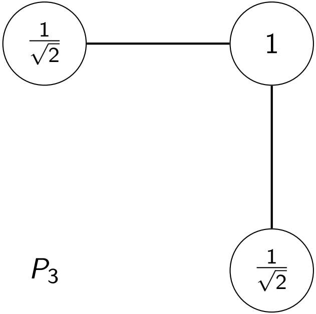
Naj bo i_0 vozlišče H, ki ima $\omega(i_0) = 0$ ter naj bo j_0 poljubno vozlišče iz G. Konstruiramo G':

$$V(G') := V(G) \cup (V(H) \setminus \{i_0\}),$$

$$E(G') := E(G) \cup E(H - i_0) \cup \{j_0 i \mid i \in V(H), i_0 i \in E(H)\}.$$

Težava

Kaj pa če H nima vozlišča i_0, da je $\omega(i_0) = 0$?



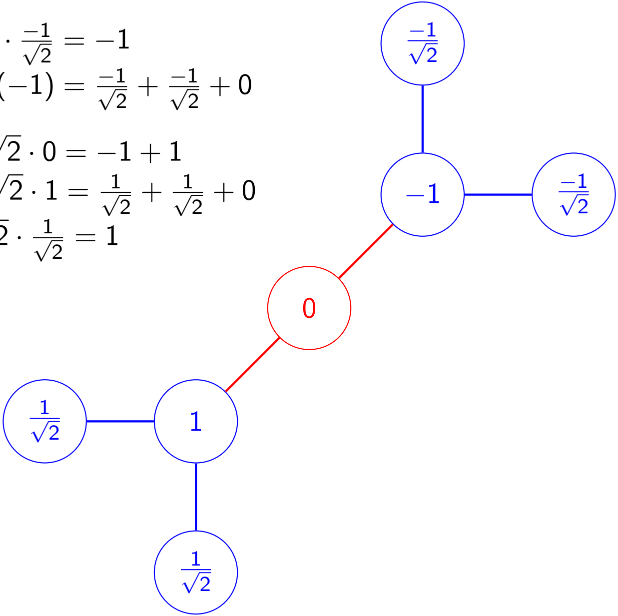
P_3

Prikazane so uteži ω za lastno vrednost $\sqrt{2}$.

Rešitev

$$\sqrt{2}\cdot\frac{-1}{\sqrt{2}} = -1$$
$$\sqrt{2}\cdot(-1) = \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{-1}{\sqrt{2}} + 0$$

$$\sqrt{2}\cdot 0 = -1 + 1$$
$$\sqrt{2}\cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 0$$
$$\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$



Produkt grafov

Velja

$$\mathrm{s}(G \,\square\, H) = \mathrm{s}(G) + \mathrm{s}(H),$$

in

$$\mathrm{s}(G \times H) = \mathrm{s}(G) \cdot \mathrm{s}(H).$$

Meje parametrov grafa.

Povprečna stopnja

Definicija

Stopnja $d(i)$ vozlišča i je število povezav, ki ima krajišče v vozlišču i. Z $\overline{d}$ označimo ***povprečno stopnjo*** *vozlišč v grafu, ki je definirana kot*

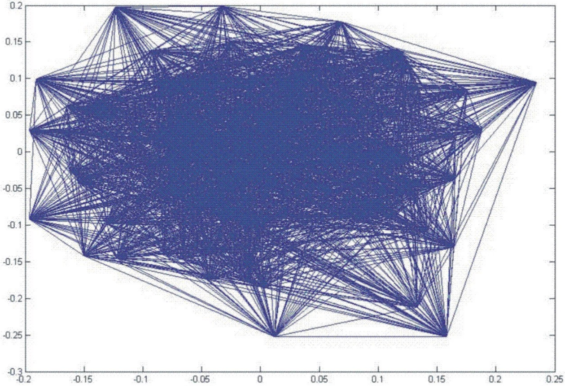
$$\overline{d} := \frac{1}{n} \sum_{i \in V} d(i).$$

Lema

Naj bo G graf in $\overline{d}$ njegova povprečna stopnja. Potem velja

$$\overline{d} \leq \lambda_n.$$

Primer



Slika: Graf s 100 vozlišči, zvezda.

Primer

Lastne vrednosti matrike sosednosti grafa zvezde so enake:
$\lambda_1 = -9.9212$, $\lambda_2 = -9.3660$, $\lambda_n = 50.4085$.

Lastne vrednosti Laplaceove matrike grafa zvezde so enake:
$\lambda_1(L) = 0$, $\lambda_2(L) = 35.7313$, $\lambda_n(L) = 65.1941$.

Za povprečno stopnjo tega grafa velja $\overline{d} \leq 50.4085$.

Diameter

Izrek

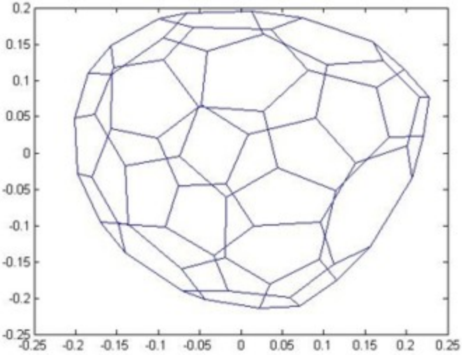
Za diameter grafa G veljata naslednji neenakosti.

$$\left\lceil \frac{4}{n\lambda_2(L)} \right\rceil \leq diam(G) \leq 2 \left\lfloor \frac{Arccosh(n-1)}{Arccosh(\frac{\lambda_n(L)+\lambda_2(L)}{\lambda_n(L)-\lambda_2(L)})} \right\rfloor + 1$$

Za zvezdo velja:

$$\begin{aligned} \left\lceil \frac{4}{100 \cdot 35.7313} \right\rceil \leq \quad & \mathrm{diam}(Z) \quad \leq 2 \left\lfloor \frac{Arccosh(99)}{Arccosh(\frac{65.1941+35.7313}{65.1941-35.7313})} \right\rfloor + 1 \\ 1 \leq \quad & \mathrm{diam}(Z) \quad \leq 5. \end{aligned}$$

Diameter



Slika: Kubični poliedrski graf, krompir.

Diameter

Lastne vrednosti matrike sosednosti krompirja so enake: $\lambda_1 = -2.7448$, $\lambda_2 = -2.7086$, $\lambda_n = 3$.
Lastne vrednosti Laplaceove matrike krompirja so enake: $\lambda_1(L) = 0$, $\lambda_2(L) = 0.213$, $\lambda_n(L) = 5.7448$.

Za krompir velja:

$$\begin{aligned}\left\lceil \frac{4}{66 \cdot 0.213} \right\rceil \leq \quad & \mathrm{diam}(\mathrm{KR}) \quad \leq 2 \left\lfloor \frac{Arccosh(65)}{Arccosh(\frac{5.7448+0.213}{5.7448-0.213})} \right\rfloor + 1 \\ 1 \leq \quad & \mathrm{diam}(\mathrm{KR}) \quad \leq 25.\end{aligned}$$

Povprečna razdalja

Povprečna razdalja $\overline{\rho}$ je povprečje vseh razdalj med različnimi vozlišči.

Izrek

Povprečna razdalja je omejena z lastnimi vrednostmi Laplaceove matrike.

$$\frac{1}{n-1}\left(\frac{2}{\lambda_2(L)}+\frac{n-2}{2}\right) \leq \overline{\rho}(G) \leq \frac{n}{n-1}\left\lceil \frac{\Delta+\lambda_2(L)}{4\lambda_2(L)} ln(n-1) \right\rceil$$

Povprečna razdalja

Za graf zvezda:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{99}\left(\frac{2}{35.7313}+\frac{98}{2}\right) \leq & \quad \overline{\rho}(Z) & \leq \frac{100}{99}\left\lceil \frac{62+35.7313}{4\cdot 35.7313}\ln(99)\right\rceil \\
0.495515 \leq & \quad \overline{\rho}(Z) & \leq 4.0404.
\end{aligned}
$$

Za graf krompirja:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{65}\left(\frac{2}{0.213}+\frac{64}{2}\right) \leq & \quad \overline{\rho}(KR) & \leq \frac{66}{65}\left\lceil \frac{3+0.213}{4\cdot 0.213}\ln(65)\right\rceil \\
0.636764 \leq & \quad \overline{\rho}(KR) & \leq 16.2462.
\end{aligned}
$$

Povezanost

Ker obstaja tesna povezava med $\lambda_2(L)$ in lastnostmi povezanosti, $\lambda_2(L)$ imenujemo tudi algebraična povezanost.

Izrek

Naj bo G graf in $\omega = \frac{\pi}{n}$. S $\kappa(G)$ označimo minimalno število vozlišč in z $\eta(G)$ označimo minimalno število povezav, ki jih moramo odstaniti, da postane G nepovezan. Potem velja:

1. $\lambda_2(L) \leq \kappa(G) \leq \eta(G)$,
2. $\lambda_2(L) \geq 2\eta(G)(1 - cos\omega)$,
3. $\lambda_2(L) \geq 2(cos\omega - cos2\omega)\eta(G) - 2cos\omega(1 - cos\omega)\Delta(G)$.

Povezanost

Primer za zvezdo:

1. $35.7313 \leq \kappa(Z) \leq \eta(Z)$,
2. $35.7313 \geq 0.00099\eta(Z)$,
   $36092.2 \geq \eta(Z)$,
3. $35.7313 \geq 0.00296\eta(Z) - 0.06116$,
   $56.3935 \geq \eta(Z)$.

Primer za krompir:

1. $0.213 \leq \kappa(KR) \leq \eta(KR)$,
2. $92.6087 \geq \eta(KR)$,
3. $32.3235 \geq \eta(KR)$.

Izoperimetrično število

Definicija

Izoperimetrično število *je definirano kot*

$$i(G) := min\left\{\frac{|E(X,Y)|}{min\{|X|,|Y|\}}; \emptyset \neq X \subsetneq V, Y = V \setminus X\right\},$$

kjer je z $E(X,Y)$ *označena množica povezav, ki povezujejo* X *in* Y*.*

$i(G)$ nam pove, najmanj koliko povezav moramo v omrežju prerezati, da ločimo največjo možno podmnožico X od preostalega večjega dela Y.

Če je G nepovezan, imamo $i(G) = 0$.

Izoperimetrično število

Za izoperimetrično število velja: $i(G) \geq \frac{\lambda_2(L)}{2}$.
Pri grafu zvezde je tako $i(Z) \geq 17.8657$.
Ko je $\lambda_2(L) \leq 2$, poda boljšo mejo naslednji izrek.

Izrek

Izoperimetrično število je navzdol omejeno z Laplaceovimi lastnimi vrednostmi z

$$i(G) \geq min\left\{1, \frac{\lambda_2(L)\lambda_n(L)}{2(\lambda_n(L) + \lambda_2(L) - 2)}\right\}.$$

Za graf krompirja, katerega $\lambda_2(L) = 0.213$, tako je $i(KR) \geq min\{1, 0.154586\} = 1$.

Izoperimetrično število

Izrek

Naj bo $G = (V, E)$ graf različen od K_1, K_2 ali K_3. Potem je

$$i(G) \leq \sqrt{\lambda_2(L)(2\Delta - \lambda_2(L))}.$$

Za zvezdo dobimo: $i(Z) \leq \sqrt{56.1601(2 \cdot 62 - 56.1601)} = 56.1601.$
Za krompir dobimo: $i(KR) \leq \sqrt{0.213(2 \cdot 3 - 0.213)} = 1.11024.$

Razširitev

Definicija

Razširitev vozlišč *je enaka*

$$c_V := min\left\{\frac{|N(S)|}{|S|}; S \subseteq V, |S| \leq \frac{n}{2}\right\}.$$

Izrek

$$\frac{\lambda_2(L)}{\frac{\Delta}{2} + \lambda_2(L)} \leq c_V.$$

Za zvezdo dobimo: $c_V \geq \frac{35.7313}{\frac{62}{2}+35.7313} = 0.53545$.

Graf z razširitvijo vsaj α imenujemo α - **povečevalec**.

Izrek

d-regularni graf je $\frac{\lambda_2(L)}{2d}$ - povečevalec.

Tako je krompir, ki je 3 regularni graf $\frac{0.213}{2\cdot 3} = 0.0355$ - povečevalec.

Kromatično število

Lastne vrednosti matrike sosednosti nam dajo zgornjo in spodnjo mejo kromatičnega števila.

Izrek

Naj bo G graf. Potem je $\chi(G) \leq 1 + \lambda_n$.

$\chi(Z) \leq 1 + 50.4085 = 51.4085$ in $\chi(KR) \leq 1 + 3 = 4$.

Izrek

Naj bo G graf. Potem je $1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \leq \chi(G)$.

$1 - \frac{50.4085}{-9.9212} = 6.08089 \leq \chi(Z)$ in $1 - \frac{3}{-2.7448} = 2.09298 \leq \chi(KR)$.

Izrek

Naj bo G graf. Potem je $\frac{n}{n-\lambda_n} \leq \chi(G)$.

$\frac{100}{100-50.4085} = 2.01647 \leq \chi(Z)$ in $\frac{66}{66-3} = 1.04762 \leq \chi(KR)$.

Neodvisno število

Definicija

Neodvisna množica *je množica vozlišč, v kateri nobeni dve vozlišči nista sosednji. Pravimo ji tudi* ***stabilna množica****. V grafu G je* ***neodvisno število*** $\alpha(G)$ *maksimalna kardinalnost med vsemi kardinalnostmi neodvisnih množic G.*

Izrek

Naj bo G d-regularen graf. Potem velja

$$\alpha(G) \leq n\left(1 - \frac{d}{\lambda_n(L)}\right).$$

Za krompir dobimo $\alpha(KR) \leq 66(1 - \frac{3}{5.7448}) = 31.534$.

Širina bisekcije

Širina bisekcije grafa je minimalno število povezav med dvema enako velikima deloma grafa. Označimo jo z bw.

Lema

Naj bo $G = (V, E)$ graf na $\{1, \ldots, n\}$, kjer je n sodo pozitivno število. Potem je

$$bw(G) \geq \frac{n}{4}\lambda_2(L).$$

Za graf zvezde velja $bw(Z) \geq \frac{100}{4}35.7313 = 143.283$.
Za graf krompirja velja $bw(KR) \geq \frac{66}{4}5.7448 = 94.7892$.

Širina bisekcije je tesno povezana z izoperimetričnim številom. Velja neenakost $i(G) \leq \frac{2bw(G)}{n}$. Spodnja meja za $i(G)$ podaja spodnjo mejo za $bw(G)$.

Hevristike za indentifikacijo grafov.

Modeli naključnih grafov

omrežje (*network*) := 'velik' graf, tj. graf za katerega želimo ugotoviti njegove kvalitativne lastnosti, a je prevelik da bi to počeli 'grafično'

Grafovski model je (končna) množica grafov, skupaj z verjetnostno porazdelitvijo.

Zanimali nas bodo naslednji trije modeli naključnih grafov.

- ER-model (Erdős, Rényi - 1959), označen z $\mathcal{G}(n, p)$
- BA-model (Barabási, Albert - 1999), *power law network* oz. *scale free network*,
- WS-model (Watts, Strogatz - 1998) *small world network*

Lastnosti konstrukcij naključnih grafov

- graf definiramo naenkrat ali pa induktivno (*graph process*), tako da dodajamo vozlišča (*network growth*)
- povezave dodajamo z enakomerno/neenakomerno verjetnostjo
- dodajanje ene povezave je/ni odvisno od dodajanja druge
- ko dodajamo povezavo nekatera vozlišča so/niso favorizirana (*preferrential attachment*)

Porazdelitev stopenj grafa G je funkcija $\mathbb{N}_0 \to [0,1]$, ki slika $k \mapsto$ (št. vozlišč grafa G stopnje k) / (št. vozlišč grafa G) = (delež vozlišč ki imajo stopnjo k).

ER-model

Je bolj teoretičen model (pri verjetnostni metodi se ga uporablja za dokaz obstoja grafov z željenimi lastnostmi).

ER-model naključnega grafa, $\mathcal{G}(n,p)$ za $n \in \mathbb{N}$ in $p \in [0,1]$, je graf ki ga dobimo iz praznega grafa $\overline{K_n}$, tako da za vsak par vozlišč z verjetnostjo p dodamo povezavo med njima. Torej, $\mathcal{G}(n,p)$ je množica vseh grafov na n točkah, kjer ima graf z m povezavami verjetnost $p^m(1-p)^{\binom{n}{2}-m}$.

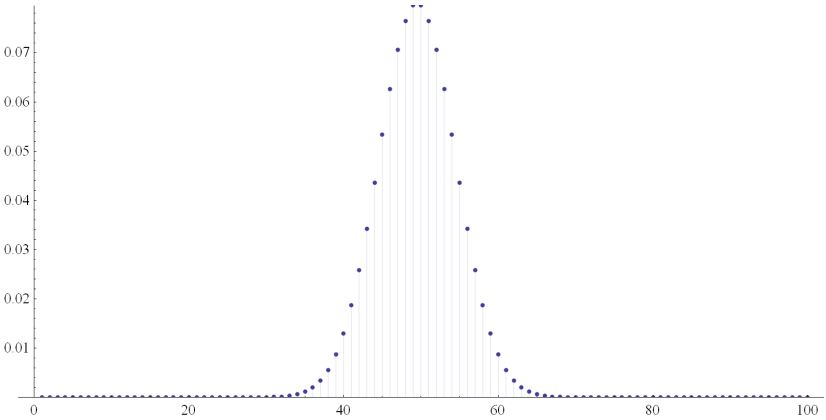
Pričakovana povprečna stopnja vozlišč je $\frac{2 \cdot \text{št.povezav}}{\text{št.vozlišč}} = \frac{2\binom{n}{2}p}{n} = p(n-1)$.

Alternativna konstrukcija: $\mathcal{G}(n,m)$, za $n,m \in \mathbb{N}$, je množica vseh grafov z n vozlišči in m povezavami, skupaj z enakomerno verjetnostno porazdelitvijo (ki je enaka $1/\binom{\binom{n}{2}}{m}$). Da se dokazati, da za $n \to \infty$ modela $\mathcal{G}(n,p)$ in $\mathcal{G}(n,m)$ pri pogoju $m = \binom{n}{2}p$ postajata enaka.

ER-model

Porazdelitev stopenj je enaka pričakovani povprečni stopnji vozlišč, tj.

$$\binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{(n-1)-k}.$$



BA-model (‘power law’ omrežje)

Motiv: večina omrežij iz vsakdanjega življenja (npr. ljudje + poznanstva; www strani + linki; molekule + reakcije; članki + citati; itd) ima lastnost, da je njihova porazdelitev stopenj potenčna.

Razlog za to je ‘*preferrential attachment*’ (npr. ko človek pride v novo družbo bo najverjetneje spoznal ljudi ki imajo veliko poznanstev; nova internetna stran bo najverjetneje imela linke do popularnih strani kot so google in wiki; molekula ki smo jo dodali v spojino bo najverjetneje reagirala z visoko reaktivnimi molekulami; nov članek se bo najverjetneje skliceval na članke z veliko citati; itd).

Cilj: želimo imeti grafovski model, katerega porazdelitev stopenj vozlišč je potenčna (*power law*), tj. oblike

$$ck^{-\delta} \quad \text{za } c, \delta > 0.$$

Kako konstuirati tak model?

BA-model (‘power law’ omrežje)

Algoritem:

- Na začetku imamo graf z vsaj dvemi vozlišči, in brez izoliranih točk.
- V vsakem koraku dodamo vozlišče v_n. Če d_j označuje trenutno stopnjo od v_j, potem v_n povežemo z vsakim v_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ z verjetnostjo
$$\frac{d_i}{\sum_{j=1}^{n-1} d_j}.$$

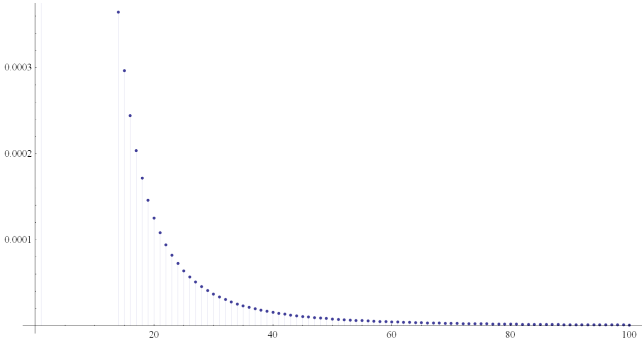
V takem modelu vozlišča z veliko sosedi dobijo v vsakem koraku zelo verjetno zopet novega soseda, vozlišča z nizko stopnjo pa postajajo vedno bolj ‘osamljena’. Pride do efekta ‘*the rich get richer*’ oz. ‘*Matthew effect*’.

BA-model ('power law' omrežje)

BA-model ('power law' omrežje)

Lastnosti:

- Pričakovana porazdelitev stopenj vozlišč je k^{-3}, torej potenčna.



- Povprečna razdalja (dolžina najkrajše poti) med vozliščema: $\frac{\ln n}{\ln \ln n}$.

WS-model ('small world' omrežje)

Motivacija: poskus je pokazal, da za dva naključno izbrana prebivalca x in y v ZDA z veliko verjetnostjo obstajajo štirje prebivalci, tako da vseh 6 skupaj tvori verigo poznanstev ki se začne v x in konča v y. Z drugimi besedami, povprečna razdalja v grafu ljudi in poznanstev je približno 6. Podobne lastnosti ima graf vseh letališč na svetu in direktnih letov, itd.

Cilj: želimo imeti grafovski model, katerega povprečna razdalja med pari vozlišč je 'majhna', kljub temu pa je tudi povprečna stopnja vozlišč 'majhna'. Natančneje, za grafovski model na n vozliščih mora povprečna razdalja med vozlišči biti proporcionalna $\log n$.

Kako konstuirati tak model?

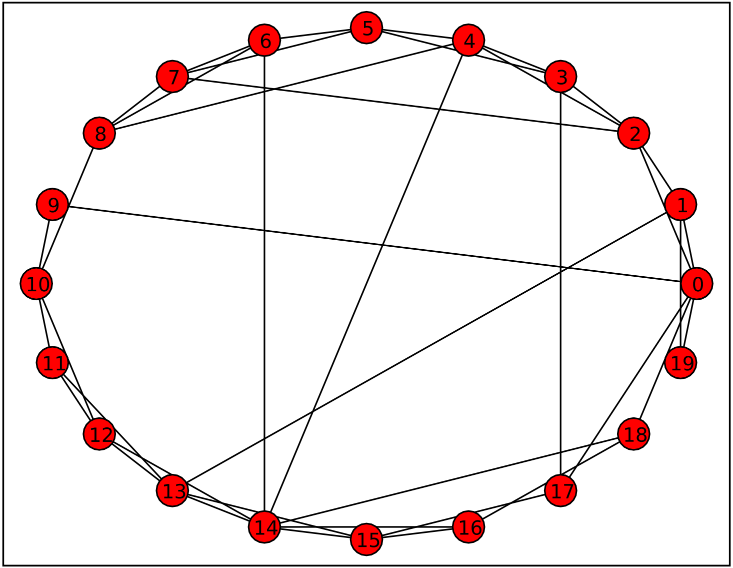
Algoritem:

- Input: n (št. vozlišč), $\overline{d}$ (povprečna stopnja, sodo naravno št.), $\beta \in [0, 1]$, tako da je $n \gg \overline{d} \gg \ln n \gg 1$.

- (determinističen korak) Konstruiramo *regular ring lattice*, tj. vozlišča so $v_0, \ldots, v_{n-1}$, in med v_i ter v_j je povezava natanko tedaj ko je $0 < |i-j| < \frac{\overline{d}}{2}$.

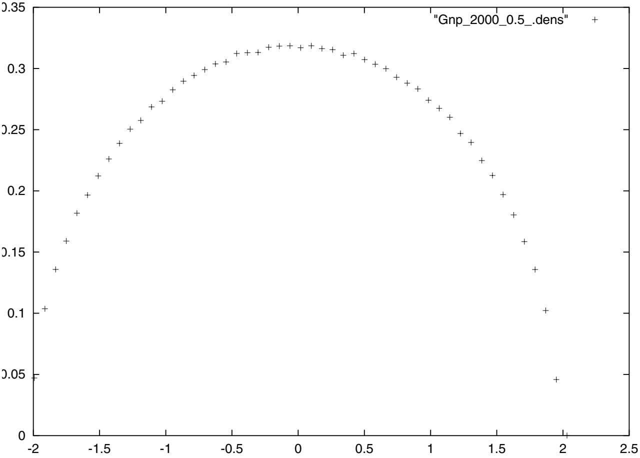
- (stohastičen korak) Iterativno za vsako obstoječe vozlišče v_i $(i=1, \ldots, n)$ vsako povezavo $\{v_i, v_j\}$ $(i<j)$ z verjetnostjo β naključno prevežemo, tj. naključno z enakomerno verjetnostjo izberemo tak $k \in \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}$, da $\{v_i, v_k\}$ ni povezava v trenutnem grafu, ter povezavo $\{v_i, v_j\}$ nadomestimo z $\{v_i, v_k\}$.

- Output: enostaven graf z n vozlišči, $\frac{n\overline{d}}{2}$ povezavami, in povprečno stopnjo $\overline{d}$.


0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19

Spekter ER-modela

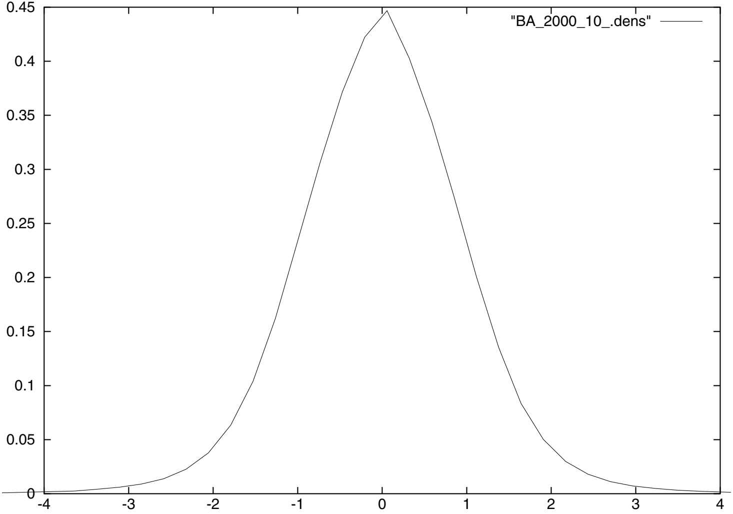
Histogram unije spektrov 100 naključno izbranih grafov iz ER-modela:



'*Wigner semicircle law*'

Spekter BA-modela

Histogram unije spektrov 100 naključno izbranih grafov iz BA-modela:



Spekter WS-modela

Histogram unije spektrov naključno izbranih grafov iz WS-modela: