Osnove verjetnostnega računa

Bojan Možina

9. oktober 2007

1 Poskusi, dogodki in verjetnost

1.1 Poskusi in dogodki

Osnovni pojmi v verjetnostnem računu so: poskus, dogodek in verjetnost dogodka.

Poskus je realizacija natanko določenih pogojev, pri katerih opazujemo enega ali več pojavov. Če pogoje spremenimo, s tem spremenimo celoten poskus.

Primeri:

- met igralne kocke,
- metanje kovanca,
- opravljanje izpita.

Pojav, ki ga opazujemo pri poskusu, imenujemo *dogodek*.

Primeri:

- pri metu kocke (poskus) vržemo 4 pike,
- pri metu kocke vržemo liho število pik,
- pri metu kovanca vržemo cifro,
- študent ne opravi izpita,
- študent opravi izpit z oceno z 10.

Za poskuse bomo privzeli, da jih lahko neomejeno velikokrat ponovimo. Dogodki se bodo nanašali na isti poskus.
Poskuse označujemo z velikimi črkami iz konca abecede, npr. X, Y, X_1. Dogodke pa označujemo z velikimi črkami iz začetka abecede, npr. A, B, D, D_1.

Vrste dogodkov

Dogodek je lahko:

- *gotov* dogodek – G: ob vsaki ponovitvi poskusa se zgodi.
  Primer: dogodek, da vržemo manj kot 7 pik pri metu igralne kocke.

- *nemogoč* dogodek – N: nikoli se ne zgodi.
  Primer: dogodek, da vržemo 4 in 5 pik hkrati pri metu igralne kocke.

- *slučajen* dogodek: včasih se zgodi, včasih ne.
  Primer: dogodek, da vržemo 4 pike pri metu igralne kocke.

Računanje z dogodki

Dogodek A je *poddogodek* ali *način* dogodka B, kar zapišemo $A \subset B$, če se vsakič, ko se zgodi dogodek A, zagotovo zgodi tudi dogodek B.

Primer: Pri metu kocke je dogodek A, da pade pet pik, način dogodka B, da pade liho število pik.

Če je dogodek A način dogodka B in sočasno dogodek B način dogodka A, sta dogodka enaka:

$$A \subset B \wedge B \subset A \quad \Leftrightarrow \quad A = B.$$

Vsota dogodkov A in B, označimo jo z $A \cup B$ ali $A + B$, se zgodi, če se zgodi vsaj eden od dogodkov A in B.

Primer: Vsota dogodka A, da vržemo sodo število pik, in dogodka B, da vržemo liho število pik, je gotov dogodek.

Velja:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl} A \cup B & = & B \cup A & A \cup N & = & A \\ A \cup G & = & A & A \cup A & = & A \\ B \subset A & \Leftrightarrow & A \cup B = A & A \cup (B \cup C) & = & (A \cup B) \cup C \end{array}$$

Produkt dogodkov A in B, označimo ga z $A \cap B$ ali AB, se zgodi, če se zgodita A in B hkrati.

Primer: Produkt dogodka A, da vržemo liho število pik, in dogodka B, da vržemo sodo število pik, je nemogoč dogodek. Prav tako je produkt dogodkov, da študent naredi izpit z 8 in da študent ne naredi izpita, nemogoč dogodek.

Velja:

$$\begin{aligned} A\cap B &= B\cap A & A\cap N &= N\\ A\cap G &= G & A\cap A &= A\\ B\subset A &\Leftrightarrow A\cap B=B & A\cap(B\cap C) &= (A\cap B)\cap C\\ A\cap(B\cup C) &= (A\cap B)\cup(A\cap C) & A\cup(B\cap C) &= (A\cup B)\cap(A\cup C) \end{aligned}$$

Razlika dogodkov A in B je dogodek, kjer se A zgodi, B pa ne; oznaka $A\backslash B$.

Primer: Razlika dogodka A (pri metu kocke vržemo liho število pik) in dogodka B (vržemo 3 pike) je dogodek, da vržemo 1 ali 5 pik.

Razloček ali simetrična diferenca $A\circ B$ dogodkov A in B je dogodek, da se zgodi natanko eden od dogodkov A in B.

Primer: Naj bo A dogodek, da pri metu kocke vržemo liho število pik in B dogodek, da vržemo manj kot 5 pik. $A\circ B$ je potem dogodek, da vržemo 2, 4 ali 5 pik.

Dogodku A nasproten dogodek $\overline{A}$ imenujemo *negacijo* dogodka A.

Primer: Nasproten dogodek dogodku, da pri metu kovanca vržemo cifro, je dogodek, da vržemo grb. Nasproten dogodek dogodku, da študent opravi izpit, je dogodek, da študent ne opravi izpita.

Velja:

$$\begin{aligned} A\cap\overline{A} &= N & A\cup\overline{A} &= G\\ \overline{N} &= G & \overline{\overline{A}} &= A\\ \overline{A\cup B} &= \overline{A}\cap\overline{B} & \overline{A\cap B} &= \overline{A}\cup\overline{B} \end{aligned}$$

Dogodka A in B sta *nezdružljiva*, če se ne moreta zgoditi hkrati, njun produkt je torej nemogoč dogodek, $A\cap B=N$; nekateri avtorji le za ta primer uporabljajo zapis kar $A+B$ (ne pa tudi za vsoto).

Primer: Dogodka, da pri metu kovanca pade cifra in da pade grb, sta nezdružljiva. Dogodka, da pri metu kocke vržemo liho število pik in da vržemo 6 pik, sta nezdružljiva.

Poljuben dogodek in njegov nasprotni dogodek sta vedno nezdružljiva. Ob vsaki ponovitvi poskusa se zagotovo zgodi eden od njiju, zato je njuna vsota gotov dogodek:

$$A\cap\overline{A}=N \quad \text{in} \quad A\cup\overline{A}=G.$$

Če lahko dogodek A izrazimo kot vsoto nezdružljivih in mogočih dogodkov, rečemo, da je A *sestavljen* dogodek. Dogodek, ki ni sestavljen, imenujemo *osnoven* ali *elementaren* dogodek.

Primer: Pri opravljanju izpita je šest osnovnih dogodkov: da študent naredi s 6, 7, 8, 9, 10 ali da študent ne naredi izpita. Dogodek, da študent naredi izpit, je sestavljen iz petih osnovnih dogodkov (ocena 6, 7, 8, 9 ali 10).

Množico dogodkov $S = A_1, A_2, \ldots, A_n$ imenujemo *popoln sistem dogodkov*, če se v vsaki ponovitvi poskusa zgodi natanko eden od dogodkov iz množice S. To pomeni, da so vsi mogoči $A_i \neq N$ paroma nezdružljivi $A_i \cap A_j = N$, $i \neq j$, in njihova vsota je gotov dogodek $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = G$.

Primer: Popoln sistem dogodkov pri metu kocke sestavljajo na primer osnovni dogodki ali pa tudi (sestavljena) dva dogodka: dogodek, da vržemo sodo število pik, in dogodek, da vržem liho število pik.

1.2 Verjetnost

Izkušnje nam povedo, da tudi za slučajne dogodke veljajo določeni zakoni, kateri pa se pokažejo šele pri velikem številu ponovitev poskusa. To so t.i. *verjetnostni (stohastični)* ali *statistični* zakoni. Eden takih najbolj znanih zakonov je *stabilizacija relativne frekvence.* Poskus, pri katerem nastopa dogodek A, ponovimo n-krat in s k označimo število tistih ponovitev poskusa, pri katerih se je dogodek A zgodil. Temu številu k rečemo frekvenca dogodka A. Razmerje

$$f(A) = \frac{k}{n}$$

pa je *relativna frekvenca (pogostost)* dogodka A v n ponovitvah poskusa. Izkušnje pokažejo, da se relativna frekvenca v velikem številu poskusov ustali pri neki vrednosti p, torej asimptotično velja $f(A) \sim p$.

Najbolj znan je poskus s kovanci, kjer so določali relativno frekvenco grba ($f(A)$):

- Buffon je v 4040 metih dobil $f(A) = 0.5069$,

- Pearson je v 12000 metih dobil $f(A) = 0.5016$,

- Pearson je v 24000 metih dobil $f(A) = 0.5005$.

Vrednost p, pri kateri se ponavadi stabilizira relativna frekvenca, nekaj pove o možnostih obravnavanega dogodka v danem poskusu. Mera za to možnost je *verjetnost*, definirana v nadaljevanju.

Statistična definicija verjetnosti

Verjetnost $P(A)$ dogodka A v danem poskusu je število p, pri katerem se navadno stabilizira relativna frekvenca dogodka A v velikem številu ponovitev tega poskusa, torej (ko je n velik): $P(A) = p \sim f(A)$.

Verjetnost dogodka je odvisna od poskusa, v katerem ga opazujemo. Če poskus (se pravi pogoje) spremenimo, se navadno spremeni tudi verjetnost. Definicija ni eksaktna (kolikokrat naj ponovimo poskus, da bomo dobili dovolj natančno verjetnost?), pove pa, da je verjetnost dogodka neka objektivna količina, odvisna od poskusa, ne pa od naše volje ali prepričanja. Ker lahko na ta način verjetnost določimo šele potem, ko smo poskus dobolj dolgo ponavljali, imenujemo tako dobljeno količino p *aposteriorna verjetnost*.

V posebnih primerih, ko so izpolnjeni določeni pogoji, lahko verjetnost določimo že vnaprej, predno sploh opravimo kakršenkoli poskus. Tako dobljeni (vnaprej določeni) vrednosti rečemo *apriorna verjetnost*.

Klasična definicija verjetnosti
Pri določitvi verjetnosti si pri nekaterih poskusih in dogodkih lahko pomagamo s klasično definicijo verjetnosti:

Vzemimo, da so dogodki iz popolnega sistema dogodkov $D_1, D_2, \ldots, D_s$ enako verjetni: $P(D_1) = P(D_2) = \ldots = P(D_s) = p$. Tedaj je verjetnost enega od dogodkov $P(D_i) = \frac{1}{s}$ $i = 1, \ldots, s$. Če je nek dogodek A sestavljen iz r dogodkov iz tega popolnega sistema dogodkov, potem je njegova verjetnost $P(A) = \frac{r}{s}$.

Primer: Izračunajmo verjetnost dogodka A, da pri metu kocke padejo več kot 4 pike. Popolni sistem enako verjetnih dogodkov sestavlja 6 dogodkov. Od teh sta le dva ugodna za dogodek A (5 in 6 pik). Zato je verjetnost dogodka A enaka $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Osnovne lastnosti verjetnosti

1. Ker je relativna frekvenca vedno nenegativna, je verjetnost $P(A) \geq 0$.

2. $P(G) = 1$, $P(N) = 0$ in $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

3. Naj bosta dogodka A in B nezdružljiva. Tedaj velja $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

4. Za dogodka A in B velja: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

   Primer: Denimo, da je verjetnost, da študent naredi izpit iz Topologije $P(T) = 2/3$. Verjetnost, da naredi izpit iz Algebre II je $P(A) = 2/5$. Če je verjetnost, da naredi vsaj enega od obeh izpitov $P(T \cup A) = 3/4$, kolikšna je verjetnost, da naredi oba izpita? $P(T \cap A) = P(T) + P(A) - P(T \cup A) = 2/3 + 2/5 - 3/4 = 0.32$

5. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

   Podobno velja tudi za vsoto n dogodkov (pravilo izključitve-vključitve).

6. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

   Primer: Iz kupa 52 kart slučajno povlečemo 3 karte. Kolikšna je verjetnost, da je med tremi kartami vsaj en as (dogodek A)? Pomagamo si z nasprotnim dogodkom. Nasprotni dogodek A dogodka A je, da med tremi kartami ni asa. Njegova verjetnost po klasični definiciji verjetnosti je določena s kvocientom števila vseh ugodnih dogodkov v popolnem sistemu dogodkov s številom vseh dogodkov v tem sistemu dogodkov. Vseh dogodkov v popolnem sistemu dogodkov je $\binom{52}{3}$, ugodni pa so tisti, kjer zbiramo med ne-asi, t.j. $\binom{48}{3}$. Torej je $P(\overline{A}) = \frac{\binom{48}{3}}{\binom{52}{3}} = 0.78$, $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0.78 = 0.22$

To nalogo rešimo direktno na naslednji način. Seštejemo število dogodkov, ko dobimo natanko en as (najprej izmed 4 asov izberemo enega in potem izmed ostalih 48 kart izberemo še dve), da dobimo natanko dva (izberemo 2 asa od štirih in eno karto od ostalih) in natanko tri ase (izberemo 3 ase od štirih). Dobljeno število spet delimo s številom vseh možnih dogodkov in dobimo iskano verjetnost:

$$P(A) = \left(\binom{4}{1}\binom{48}{2} + \binom{4}{2}\binom{48}{1} + \binom{4}{3}\binom{48}{0}\right) / \binom{52}{3} = 0.22$$

7. Če so dogodki A_i, $i \in I$, paroma nezdružljivi, velja $P(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$. To velja tudi za neskončne množice dogodkov.

2 Aksiomi Kolmogorova

Dogodek predstavimo z množico zanj ugodnih izidov, gotov dogodek G ustreza univerzalni množici, nemogoč dogodek pa prazni množici.
Neprazna družina dogodkov $\mathcal{D}$ je algebra, če velja:

- $A \in \mathcal{D} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{D}$
- $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{D}$

  Za neskončne množice to posplošimo:
- $A_i \in \mathcal{D}, i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{D}$

Dobljeni strukturi rečemo *σ-algebra*.

Naj bo $\mathcal{D}$ σ-algebra v G. *Verjetnost* (verjetnostna preslikava) na G je preslikava $P : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ z lastnostmi (aksiomi Kolmogorova):

- $P(A) \geq 0$
- $P(G) = 1$
- Če so dogodki A_i, $i \in I$, paroma nezdružljivi, je $P(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$.

Iz teh treh aksiomov Kolmogorova lahko izpeljemo vse ostale lastnosti verjetnosti ($P(N) = 0$, števna aditivnost, $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Trojica $(G, \mathcal{D}, P)$ določa *verjetnostni prostor*, kjer je G dana neprazna množica, $\mathcal{D}$ σ-algebra podmnožic G in $P : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ verjetnostna preslikava. Pri tem imenujemo elemente G izide, elemente $\mathcal{D}$ pa dogodke.

2.1 Produkt verjetnostnih prostorov

Če sta $V_1 = (G_1, \mathcal{D}_1, P_1)$ in $V_2 = (G_2, \mathcal{D}_2, P_2)$ verjetnostna prostora, potem definiramo *produkt verjetnostnih prostorov* $V_1 \times V_2$ na naslednji način:
$G_1 \times G_2$ definiramo kot množico urejenih parov (navaden kartezični produkt):

- $G_1 \times G_2 = \{(g_1, g_2); g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\}$,
- $\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 = \{D_1 \times D_2; D_1 \in \mathcal{D}_1, D_2 \in \mathcal{D}_2\}$ v splošnem ni σ-algebra. Mora pa produktna σ-algebra vsebovati vse elemente $\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$.

  Obstaja najmanjša σ-algebra $\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2)$ podmnožic $G_1 \times G_2$, ki vsebuje $\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$, in je enolična.

Potrebujemo še verjetnostno preslikavo $P : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. Definiramo jo s predpisom:

$$P(D_1 \times D_2) = P_1(D_1) P_2(D_2),$$

kjer je $D_1 \in \mathcal{D}_1$ ter $D_2 \in \mathcal{D}_2$. Da se pokazati, da lahko domeno P razširimo na celo σ-algebro $\mathcal{D}$.
$V_1 \times V_2 = (G_1 \times G_2, \mathcal{D}, P)$ je produkt verjetnostnih prostorov. Preslikavi P rečemo tudi *produktna mera*.

Produkt večjega števila verjetnostnih prostorov lahko definiramo podobno.
Če sta množici D_1 in D_2 končni in njuni σ-algebri vsebujeta vse njune podmnožice, potem $\mathcal{D}$ vsebuje vse podmnožice $G_1 \times G_2$. Primer tega je metanje dveh igralnih kock.

3 Pogojna verjetnost

Opazujemo dogodek A ob poskusu X, ki je realizacija kompleksa pogojev K. Verjetnost dogodka A je tedaj $P(A)$.

Kompleksu pogojev K pridružimo mogoč dogodek B, $P(B) > 0$. Realizacija tega kompleksa pogojev $K' = K \cap B$ je poskus X' in verjetnost dogodka A v tem poskusu je $P_B(A)$, ki se z verjetnostjo $P(A)$ ujema ali pa ne.

Pravimo, da je poskus X' poskus X s pogojem B in verjetnost $P_B(A)$ *pogojna verjetnost* dogodka A glede na dogodek B, kar zapišemo takole: $P_B(A) = P(A|B)$. Pogojna verjetnost $P(A|B)$ v poskusu X' je verjetnost dogodka A v poskusu X s pogojem B. Pogosto pogojno verjetnost pišejo tudi $P(A/B)$.

Denimo, da smo n–krat ponovili poskus X in da se je ob tem k_B–krat zgodil dogodek B. To pomeni, da smo v n ponovitvah poskusa X napravili k_B–krat poskus X'. Dogodek A se je zgodil ob poskusu X' le, če se je zgodil tudi B, t.j. $A \cap B$. Denimo, da se je dogodek $A \cap B$ zgodil ob ponovitvi poskusa $k_{A\cap B}$–krat. Potem je relativna frekvenca dogodka A v opravljenih ponovitvah poskusa X':

$$f_B(A) = f(A|B) = \frac{k_{A\cap B}}{k_B} = \frac{k_{A\cap B}/n}{k_B/n} = \frac{f(A \cap B)}{f(B)}$$

oziroma

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Pogojna verjetnost P_B ima prav take lastnosti kot brezpogojna. Trojica $(B, \mathcal{D}_B, P_B), \mathcal{D}_B = A \cap B, A \in D$, je zopet verjetnostni prostor.

Primer: Denimo, da je na FMF 100 študentov matematike. Zanima nas struktura študentov po spolu (M – moški, Z – ženski spol) in po tem, ali so opravili izpit iz Topologije (T – opravil Topologijo, N – ni opravil Topologije). Podatke po obeh spremenljivkah uredimo v dvorazsežno frekvenčno porazdelitev, ki jo imenujemo tudi *kontingenčna tabela*:

spol / top	T	N	
M	22	18	40
Z	34	26	60
	56	44	100

Poglejmo, kolikšna je verjetnost, da bo slučajno izbrana oseba ženskega spola pri pogoju, da je opravila izpit iz Topologije.

$$P(T) = \frac{56}{100},\ P(Z \cap T) = \frac{34}{100}$$

$$P(Z|T) = \frac{P(Z \cap T)}{P(T)} = \frac{34 \cdot 100}{100 \cdot 56} = \frac{34}{56}$$

ali neposredno iz kontingenčne tabele $P(Z|T) = \frac{34}{56}$.

Ker je

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

in

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A),$$

je tudi $P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$.

Dogodka A in B sta *neodvisna*, če velja $P(A|B) = P(A)$. Zato za neodvisna dogodka A in B velja $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Za n dogodkov A_i podobno velja

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i).$$

Za nezdružljiva dogodka A in B velja $P(A|B) = 0$.

Primer: Iz posode, v kateri imamo 6 belih in 3 črne kroglice, dvakrat na slepo izberemo po eno kroglico. Kolikšna je verjetnost dogodka, da je prva kroglica bela (B) in druga črna (C).

- Če po prvem izbiranju izvlečene kroglice ne vrnemo v posodo (odvisnost), velja: $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C|B) = \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} = 0.25$

- Če po prvem izbiranju izvlečeno kroglico vrnemo v posodo (neodvisnost), velja: $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C|B) = P(B) \cdot P(C) = \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Dogodka A in B sta neodvisna, če je $P(A|B) = P(A)$. Dogodki A_i, $i \in I$, so neodvisni, če je $P(A_j) = P(A_j | \bigcap_{j-1}^{i=1} A_i), j \in I$.

Za neodvisne dogodke $A_i, i \in I$, velja

$$P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

3.1 Obrazec za razbitja in Bayesov obrazec

Naj bo A_i, $i \in I$, razbitje gotovega dogodka: $\bigcup_{i \in I} A_i = G$ in dogodki so paroma nezdružljivi, $A_i \cap A_j = N$, $i \neq j$. Tedaj je za vsak dogodek B (obrazec za razbitja):

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(A_i) \cdot P(B|A_i).$$

Na stvar lahko pogledamo tudi kot na dvokoračni poskus: v prvem koraku se zgodi natanko eden od dogodkov A_i, v drugem pa B. Včasih nas zanima po uspešnem izhodu tudi drugega koraka, verjetnost tega, da se je na prvem koraku zgodil dogodek A_i. Odgovor dobimo iz zgornje formule; pravimo mu Bayesov obrazec:

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B|A_k)}{\sum_{i \in I} P(A_i) \cdot P(B|A_i)} = \frac{P(A_k) \cdot P(B|A_k)}{P(B)}.$$

Primer: V trgovini prodajajo čokoladna jajčka, v katerih je skrita figurica živali. Jajčka dobivajo iz dveh tovarn. V prvi tovarni dajejo figurice slona v 10%, v drugi pa v 15% jajčk. V trgovini imajo na zalogi 20 jajčk iz prve in 10 jajčk iz druge tovarne. Kolikšna je verjetnost, da kupimo jajček s figurico slona?
Naj bosta A_1 in A_2 dogodka, da kupimo jajček, narejen v prvi oz. drugi tovarni. Naj bo B dogodek, da je v jajčku skrita figurica slona. Iz podatkov razberemo $P(A_1) = \frac{2}{3}$, $P(A_2) = \frac{1}{3}$ ter $P(B|A_1) = 0.10$, $P(B|A_2) = 0.15$. Po obrazcu za razbitja velja

$$P(A) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) = \frac{7}{60}.$$

Recimo, da smo kupili jajček, v katerem je bila figurica slona. Kolikšna je verjetnost, da je bil jajček izdelan v drugi tovarni?
Po Bayesovem obrazcu je

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{3}{7}.$$

Literatura

[1] M. Hladnik: *Verjetnost in statistika.* Ljubljana: Založba FE in FRI, 2002.

[2] R. Jamnik: *Verjetnostni račun in statistika.* Ljubljana: DMFA, 1995.

[3] J. A. Čibej: *Matematika: Kombinatorika, vejetnostni račun, statistika.* Ljubljana: DZS, 1998.

[4] V. Batagelj: *Verjetnostni račun in statistika, gradiva za predavanja.* Ljubljana: FMF, 2005.

[5] G. R. Grimmett in D. R. Stirzaker: *Probability and Random Processes, Second Edition.* Oxford: Oxford University Press, 1992.