Barvanje realnih števil

Bojan Možina

4. december 2007

Ukvarjali se bomo s problemom, ali je za končno množico $S \subset \mathbb{R}$ mogoče realna števila pobarvati s k barvami tako, da vsaka translacija množice S vsebuje vsaj eno točko v vsaki od k barv.

Definicija 1 *Naj bo* $c : \mathbb{R} \to [k] := \{1, 2, \ldots, k\}$ *barvanje realnih števil. Množica* $T \subset \mathbb{R}$ *je* barvita, *če je* $c(T) = [k]$ *(C surjektivna).*

Izrek 1 *Za vsak* k *obstaja tak* m*, da za vsako množico* $S \subset \mathbb{R}$ *moči* m *obstaja takšno barvanje realnih števil s* k *barvami, da je vsaka translacija množice* S *barvita.*

Najprej bomo dokazali, da izrek velja, če imamo le končno množico translatorjev (števil, za katera transliramo). V tem primeru se izrek glasi takole:

Izrek 2 *Za vsak* k *obstaja tak* $m = m(k)$*, da za vsako množico* $S \subset \mathbb{R}$ *moči* m *in končno množico* $X \subset \mathbb{R}$ *obstaja takšno barvanje množice* $T = \bigcup_{x \in X}(S + x)$ *s* k *barvami, da je vsaka translacija* $S + x$ *barvita za* $x \in X$*.*

Dokaz. Naj bo $c : T \to [k]$ slučajno barvanje (vsak $y \in T$ slučajno obarvamo neodvisno in enolično z verjetnostjo $1/k$). Za vsak $x \in X$ naj bo A_x dogodek, da $c(S + x)$ ne vsebuje vseh k barv. Verjetnost dogodka A_x je največ $p = k(1 - \frac{1}{k})^m$. še več, vsak A_x je neodvisen od ostalih dogodkov razen od dogodkov $A_{x'}$, kjer je $(S+x) \cap (S+x') \neq \emptyset$. število takih dogodkov je največ $d = m(m - 1)$. Če izberemo dovolj velik m, da je $ep(d + 1) = ek(1 - \frac{1}{k})^m(m(m - 1) + 1) \leq 1$, kjer je e osnova naravnega logaritma, nam (simetrična) lokalna lema pove, da obstaja tako barvanje, da so vse množice $S + x$, $x \in X$, barvite.

Dokaz izreka 1. Poglejmo idejo za dokaz izreka. Naj bo $Q = \{q_1, q_2, q_3, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ števna množica, npr. racionalna števila. Obarvali bomo množico $T = \bigcup_{q \in Q}(S + q)$. Naj bo $T_i = \bigcup_{j=1}^{i}(S + q_j)$. Za vsak T_i po izreku 2 obstaja tako barvanje $c_i : T_i \to [k]$, da so vse množice $S + q_j$, $j \leq i$, barvite. Definirali bomo barvanje $c : T \to [k]$ z diagonalnim argumentom.

Obstaja končno barvanj množice $S + q_1$, imamo neskončno zaporedje barvanj $(c_1, c_2, \ldots)$, torej obstaja neskočno podzaporedje $(c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots)$ vseh barvanj, ki ustrezajo $S+q_1$ ($S+q_1$ je barvit pri tem podzaporedju). Pišimo $c_j^{(1)} = c_{i_j}$, tako je naše zaporedje $(c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, c_3^{(1)}, \ldots)$. Vsa ta barvanja, razen morda $c_1^{(1)}$, so definirana na $S + q_2$, in obstaja le končno mnogo možnosti za izbiro zaporedja $(c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, c_3^{(2)}, \ldots)$, kjer vsa barvanja ustrezajo $S + q_2$. Če to ponavljamo, po l korakih dobimo zaporedje $(c_1^{(l)}, c_2^{(l)}, c_3^{(l)}, \ldots)$, čigar barvanja ustrezajo $T_l = \bigcup_{i=1}^{l}(S + q_i)$ in tako, da je vsaka množica $S + q_i$, $i = 1, 2, \ldots, l$, barvita. Opazimo, da barvanje T_l ostane nespremenjeno po l-tem koraku, in vsak $c_j^{(r)}$, $r \geq l$, ustreza $c_1^{(l)}$ na T_l.

Definiramo "diagonalno"barvanje $c : T \to [k]$ s $c(x) = c_1^{(l)}(x)$, kjer je l najmanjši tak indeks, da je $x \in T_l$. Opazimo, da je $c(x) = c_1^{(r)}$ za vse take r, da je $x \in T_r$. Ker je vsaka $S + q_r$ barvita pri $c_1^{(r)}$ po konstrukciji, sledi, da je barvita tudi pod c.

Dokažimo še eksistenco želenega barvanja realnih števil. Spomnimo se dveh dejstev o kompaktnih topoloških prostorih. Prvič, če je $\mathcal{C}$ družina zaprtih podmožic kompaktnega prostora, tako da je $\bigcap_{C \in \mathcal{F}} C \neq \emptyset$ za vsako končno poddružino $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}$, potem je $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset$. Drugič, kartezični produkt kompaktnih topoloških prostorov je kompakten topološki prostor. V posebnem, prostor M vseh preslikav $f : \mathbb{R} \to [k]$ je kompakten. Topologija tega prostora je moči $[k]^{\mathbb{R}}$, oz. vsaka množica preslikav oblike

$$\{f \in M; f(i) = g(i) \text{ za vse } i \in I\} \tag{1}$$

zaprta, kjer je $I \subset \mathbb{R}$ končna in $g : I \to [k]$ poljubna.

Naj $C_x \subset M$ pomeni množico vseh barvanj, za katera je $S + x$ barvita. Vsak C_x je končna unija množic oblike (1) in zato zaprta v M. Izrek 2 nam pove, da za vsako končno množico $X \subset \mathbb{R}$ velja $\bigcap_{x \in X} C_x \neq \emptyset$. Iz kompaktnosti množice M sledi obstoj $c \in \bigcap_{x \in \mathbb{R}} C_x$ in to barvanje naredi vse množice $S + x$ $(x \in \mathbb{R})$ barvite in c je iskano barvanje realnih števil.

Literatura

[1] J. Matoušek, J. Vondrák, *The Probabilistic Method*, Praga: ITI, 2002.