KLIČNO ŠTEVILO

Judita Plantev

11. december 2007

Najprej ponovimo definiciji disperzije in kovariance:

Definicija 1 ***Disperzija*** *ali* ***varianca*** *realne slučajne spremenljivke X je*

$$D(X) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2] = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2.$$

Definicija 2 ***Kovarianca*** *dveh slučajnih spremenljivk je*

$$\mathrm{Cov}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = \mathbf{E}[(\mathrm{X} - \mathbf{E}[\mathrm{X}])(\mathrm{Y} - \mathbf{E}[\mathrm{Y}])] = \mathbf{E}[\mathrm{XY}] - \mathbf{E}[\mathrm{X}]\mathbf{E}[\mathrm{Y}].$$

Definicija 3 ***Maksimalna klika*** *je klika, ki ni vsebovana v nobeni drugi kliki.* ***Največja klika*** *je klika z največjim številom točk izmed vseh klik.* ***Klično število*** *je*

$$\omega(G) = \text{“velikost največje klike v G“}.$$

Obravnavali bomo klično število v slučajnem grafu $G(n, 1/2)$. Najprej za fiksno število k preštejmo število klik velikosti k. Za vsako množico S, ki vsebuje k točk, naj X_S označi indikatorsko spremenljivko dogodka, da je S klika. Potem je $X = \sum_{|S|=k} X_S$ število k-klik v grafu. Pričakovano število k-klik v grafu je

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{|S|=k} \mathbf{E}[X_S] = \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}}.$$

Ta funkcija pade pod 1 približno pri $k = 2\log_2 n$, ki je tipična velikost največje klike v $G(n, 1/2)$.

Lema 1

$$\lim_{n\to\infty} P[\omega(G(n, 1/2)) > 2\log_2 n] = 0$$

Dokaz. Postavimo $k(n) = \lceil 2\log_2 n \rceil$ in izračunajmo povprečno število klik te velikosti

$$\mathbf{E}[X] = \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}} = \frac{n!}{k!(n-k)!} 2^{-k(k-1)/2} \leq \frac{(2^{k/2})^k}{k!} 2^{-k(k-1)/2} = \frac{2^{k/2}}{k!},$$

saj je

$$\frac{n!}{(n-k)!} \leq n^k = (2^{(\log_2 n)})^k \leq (2^{\frac{\lceil 2\log_2 n \rceil}{2}})^k = (2^{k/2})^k.$$

$\frac{2^{k/2}}{k!}$ pa gre proti 0, ko gre $n \to \infty$. Zato je

$$\lim_{n\to\infty} P[\omega(G(n,1/2)) > 2\log_2 n] = 0.$$

□

Težje je pojasniti, da bo vedno obstajala klika velikosti blizu praga $2\log_2 n$, kar bomo dokazali. Še prej pa ponovimo lemo, ki jo bomo potrebovali v dokazu. Dokaz leme izpustimo.

Lema 2 *Imamo zaporedje $X_1, X_2, \ldots$ nenegativnih slučajnih spremenljivk, tako da velja*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D(X_n)}{(\mathbf{E}[X_n])^2} = 0.$$

Potem velja

$$\lim_{n\to\infty} P[X_n > 0] = 1.$$

Izrek 1 *Naj bo $k(n)$ taka funkcija, da bo*

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k(n)} 2^{-\binom{k(n)}{2}} = \infty.$$

Potem velja

$$\lim_{n\to\infty} P[\omega(G(n,1/2)) \geq k(n)] = 1.$$

Dokaz. Pišimo $E(n,k) = \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}}$. Najprej opazimo, da lahko predpostavimo, da je n dovolj velik in da je dovolj gledati le tiste k, za katere velja

$$\frac{3}{2}\log_2 n \leq k < 2\log_2 n,$$

kjer lahko $\frac{3}{2}$ zamenjamo s katerokoli konstanto, manjšo od 2. Pokazali smo že, da $E(n, 2\log_2 n) \to 0$, ko $n \to \infty$. Moramo pokazati še $E(n, \frac{3}{2}\log_2 n) \to \infty$, ko $n \to \infty$. Najprej ocenimo $\log_2 E(n,k)$:

$$\log_2 E(n,k) \geq \log_2[(\frac{n}{k})^k 2^{-k^2/2}] = k\log_2 n - k\log_2 k - \frac{k^2}{2}.$$

Zdaj namesto k vstavimo $\frac{3}{2}\log_2 n$ in dobimo

$$\begin{aligned}\log_2 E(n, \frac{3}{2}\log_2 n) &\geq \frac{3}{2}\log_2^2 n - o(\log_2^2 n) - \frac{9}{8}\log_2^2 n \\ &= \frac{3}{8}\log_2^2 n - o(\log_2^2 n) \to \infty\end{aligned}$$

ko $n \to \infty$. Torej res velja $E(n, \frac{3}{2}\log_2 n) \to \infty$, ko $n \to \infty$.

Naj $X = \sum_{|S|=k(n)} X_S$ označi število klik velikosti $k(n)$ v $G(n, 1/2)$. Po predpostavki izreka velja $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[X] = \infty$. Ker želimo uporabiti lemo, moramo izračunati disperzijo X:

$$D(X) = \sum_{|S|=|T|=k} \mathrm{Cov}[\mathrm{X_S}, \mathrm{X_T}]$$

(zajeli smo vse množice velikosti k, tudi kadar je $S = T$, saj je $D(X) = \mathrm{Cov}[\mathrm{X}, \mathrm{X}]$). Vemo, da je $\mathrm{Cov}[\mathrm{X_S}, \mathrm{X_T}]$ enaka 0, če sta X_S in X_T neodvisni slučajni spremenljivki. Spremenljivki X_S in X_T pa sta neodvisni, kadar imata S in T kvečjemu eno skupno točko (zato pripadajoče klike nimajo skupnih povezav). Torej nas zanimajo le tisti pari (S, T), za katere velja $|S \cap T| \geq 2$.

$D(X)$ lahko zapišemo kot

$$D(X) = \sum_{t=2}^{k} C(t),$$

kjer je

$$C(t) = \sum_{|S\cap T|=t} \mathrm{Cov}[\mathrm{X_S}, \mathrm{X_T}].$$

Za fiksen $t = |S \cap T|$ imajo klike na S in T skupaj $2\binom{k}{2} - \binom{t}{2}$ povezav, torej velja

$$\mathrm{Cov}[\mathrm{X_S}, \mathrm{X_T}] \leq \mathbf{E}[\mathrm{X_S X_T}] = 2^{\binom{t}{2} - 2\binom{k}{2}}.$$

Ker lahko par podmnožic (S, T) z $|S| = |T| = k$ in $|S \cap T| = t$ izberemo na $\binom{n}{k}\binom{k}{t}\binom{n-k}{k-t}$ načinov, je

$$C(t) \leq \binom{n}{k}\binom{k}{t}\binom{n-k}{k-t} 2^{\binom{t}{2} - 2\binom{k}{2}}.$$

Moramo pokazati, da velja

$$\frac{D(X)}{(\mathbf{E}[X])^2} = \sum_{t=2}^{k} \frac{C(t)}{(\mathbf{E}[X])^2} \;\to\; 0,$$

saj lahko nato uporabimo lemo. Vsoto razbijemo glede na t na dva dela. Zaradi lažjega računanja predpostavimo, da je $k = k(n)$ sodo.

V *prvem delu*, kjer je $2 \le t \le \frac{k}{2}$, pokažimo, da gre vsota proti 0. Pri ocenjevanju bomo potrebovali, da je $k < 2\log_2 n$. Ker imamo produkt več binomskih koeficientov, jih razširimo, saj se bo kaj pokrajšalo ali lahko kaj ustrezno združimo. Ocenimo

$$\begin{aligned}
\frac{C(t)}{(\mathbf{E}(X))^2} &\le \frac{\binom{n}{k}\binom{k}{t}\binom{n-k}{k-t}}{(\binom{n}{k})^2 2^{-2\binom{k}{2}}} 2^{\binom{t}{2}-2\binom{k}{2}} \le \frac{\binom{k}{t}\binom{n-k}{k-t}}{\binom{n}{k}} 2^{\binom{t}{2}} \\
&\le \tfrac{k^t}{t!} \cdot \tfrac{(n-k)(n-k-1)\cdots(n-2k+t+1)}{(k-t)!} \cdot \tfrac{k!}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} \cdot 2^{\binom{t}{2}} \\
&\le k^{2t} \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-k+1)\cdot t!} \cdot 2^{t^2/2} \le k^{2t} n^{-t} 2^{t^2/2} \\
&\le k^{2t}(2^{-k/2})^t 2^{t^2/2} = (k^2 2^{-k/2} 2^{t/2})^t \le (k^2 2^{-k/4})^t,
\end{aligned}$$

saj je $t \le \frac{k}{2}$. Lahko zapišemo

$$\sum_{t=2}^{k/2} \frac{C(t)}{(\mathbf{E}[X])^2} \le \sum_{t=2}^{k/2} q^t,$$

kjer je $q = k^2 2^{-k/4} = o(1)$ in tako gre vsota na levi proti 0.

V *drugem delu*, kjer velja $\frac{k}{2} < t \le k$, pokažimo, da je $\sum_{t=k/2+1}^{k} C(t)\backslash\mathbf{E}[X]) = o(1)$ za $k \ge \frac{3}{2}\log_2 n$. Ker je $\mathbf{E}[X] \to \infty$, bo veljalo tudi $\sum_{t=k/2+1}^{k} C(t)\backslash(\mathbf{E}[X])^2 \to 0$. V tem delu je lažje oceniti binomske koeficiente. Pri ocenjevanju uporabimo formulo $\binom{n}{k} \le n^k$ in dobimo

$$\begin{aligned}
\frac{C(t)}{\mathbf{E}[X]} &\le \binom{k}{t}\binom{n-k}{k-t} 2^{\binom{t}{2}-\binom{k}{2}} \le \binom{k}{k-t}\binom{n}{k-t} 2^{\binom{t}{2}-\binom{k}{2}} \\
&\le k^{k-t} n^{k-t} 2^{(t^2-k^2-t+k)/2} \\
&= (kn)^{k-t} 2^{-(k-t)(k+t-1)/2} = (kn 2^{-(k+t-1)/2})^{k-t} \\
&\le (2^{\log_2 k + (2/3)k - (k+t-1)/2})^{k-t} \\
&\le (2^{\log_2 k + (2/3)k - (3/4)k})^{k-t},
\end{aligned}$$

saj je $t > \frac{k}{2}$. Ker je $2^{\log_2 k+(2/3)k-(3/4)k} = o(1)$, po ocenjevanju z geometrijskimi vrstami sledi, da velja $\sum_{t=k/2+1}^{k} C(t)/(\mathbf{E}[X])^2 \to 0$, kot smo trdili. Dokazali smo torej, da je $\lim_{n\to\infty} D(X)/(\mathbf{E}[X])^2 = 0$. Po lemi sledi $\lim_{n\to\infty} P[X > 0] = 1$. Torej je $\lim_{n\to\infty} P[\omega(G(n,1/2)) \geq k(n)] = 1$. $\square$

Opomba. Če izberemo $k(n) = (2-\varepsilon)\log_2 n$, pogoji izreka veljajo za vsak $\varepsilon > 0$. To pomeni, da število klik $\omega(G(n,1/2))$ vedno leži med $(2-\varepsilon)\log_2 n$ in $2\log_2 n$. Koncentracija števila klik je celo močnejša. Leta 1976 so Bollobás, Erdös in Matula dokazali, da obstaja taka funkcija $k(n)$, da velja

$$\lim_{n\to\infty} P[k(n) \leq \omega(G(n,1/2)) \leq k(n)+1] = 1.$$

Literatura

[1] J. Matoušek, J. Vondrak, *The probabilistic method (Lecture Notes)*, http://kam.mff.cuni.cz/ matousek/lectnotes.html.