VERJETNOSTNA METODA

Katja Kristan

18. januar 2008

1 LINEARNOST MATEMATIČNEGA PRIČAKOVANJA

1.1 URAVNOTEŽENI VEKTORJI

Izrek 1 *Naj bodo* $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ *za katere velja* $|v_i| = 1$ *za vsak* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. *Potem obstajajo taki* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, *ki lahko zavzamejo vrednosti* 1 *ali* -1, *da velja*

$$|\varepsilon_1 v_1 + \ldots + \varepsilon_n v_n| \leq \sqrt{n}$$

in taki, da velja

$$|\varepsilon_1 v_1 + \ldots + \varepsilon_n v_n| \geq \sqrt{n}.$$

Dokaz: Naj bodo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ izbrani z isto verjetnostjo in neodvisno iz množice $\{1, -1\}$. In naj bo

$$X = |\varepsilon_1 v_1 + \ldots + \varepsilon_n v_n|^2.$$

Potem je

$$X = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_i v_i \cdot \varepsilon_j v_j,$$

če zapišemo še malo drugače

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j v_i \cdot v_j.$$

Tako je zaradi linearnosti matematičnega upanja

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i \cdot v_j \mathbf{E}[\varepsilon_i \varepsilon_j].$$

Če $i \neq j$, potem je

$$\mathbf{E}[\varepsilon_i \varepsilon_j] = \mathbf{E}[\varepsilon_i]\mathbf{E}[\varepsilon_j] = 0.$$

Če pa je $i = j$, je $\varepsilon_i^2 = 1$ in zato

$$\mathbf{E}[\varepsilon_i^2] = 1.$$

Tako je

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} v_i v_i = n.$$

Od tod sledi, da obstajajo določeni $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, katerih zaloga vrednosti je $\{1, -1\}$ tako da je $X \geq n$ in taki da je $X \leq n$. Ko te neenakosti korenimo, dobimo ravno to kar smo hoteli dokazati. ■

Izrek 2 *Naj bodo $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ za katere velja $|v_i| = 1$ za vsak $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Naj bodo $p_1, p_2, \ldots, p_n \in [0, 1]$ poljubne in naj bo $w = p_1 v_1 + p_2 v_2 + \ldots + p_n v_n$. Potem obstajajo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}$ da za $v = \varepsilon_1 v_1 + \ldots + \varepsilon_n v_n$ velja*

$$|w - v| \leq \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Dokaz: Izberimo ε_i neodvisno in jim določimo verjetnost

$$P[\varepsilon_i = 1] = p_i, P[\varepsilon_i = 0] = 1 - p_i$$

Naključna izbira ε_i nam da naključno spremenljivko v in tako naključno spremenljivko

$$X = |w - v|^2.$$

Velja,

$$X = |\sum_{i=1}^{n} (p_i - \varepsilon_i) v_i|^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (p_i - \varepsilon_i) v_i \, (p_j - \varepsilon_j) v_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i \cdot v_j (p_i - \varepsilon_i)(p_j - \varepsilon_j).$$

Zato je

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i \cdot v_j \mathbf{E}[(p_i - \varepsilon_i)(p_j - \varepsilon_j)].$$

Če je $i \neq j$, potem velja

$$\mathbf{E}[(p_i - \varepsilon_i)(p_j - \varepsilon_j)] = \mathbf{E}[(p_i - \varepsilon_i)]\mathbf{E}[(p_j - \varepsilon_j)] = 0,$$

za $i = j$, pa je

$$\mathbf{E}[(p_i - \varepsilon_i)^2] = p_i (p_i - 1)^2 + (1 - p_i) p_i^2 = p_i (1 - p_i) \leq \frac{1}{4}$$

Torej je

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i (1 - p_i) |v_i|^2 \leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} |v_i|^2 = \frac{n}{4}.$$

■

2 DRUGI MOMENT

2.1 RAZLIČNE VSOTE

Naj bo $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ množica pozitivnih celih števil. Pravimo, da ima množica A različne vsote, če za vse vrste

$$\sum_{i \in S} x_i, \quad \text{kjer je} \quad S \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$$

velja, da so si različne. Naj $f(n)$ označuje maksimalen k za katerega obstaja množica $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ z različnimi vsotami. Najpreprostejši primer take množice z različnimi vsotami je $\{2^i; i \leq \log_2 n\}$. Ta primer kaže $f(n) \geq 1 + (log_2 n)$.

Kako pa bi $f(n)$ lahko omejili navzgor? Erdös je obljubil 300 \$ tistemu, ki dokaže ali ovrže trditev

$$f(n) \leq \log_2 n + C,$$

kjer je C neka konstanta. Iz zgornjega vidimo, da če so vse $2^{f(n)}$ vsote različne in manj kot nk, potem

$$f(n) < nk = nf(n)$$

in tako

$$f(n) < \log_2 n + \log_2(\log_2 n) + O(1).$$

Razmišljanje z metodo drugega momenta (torej s pomočjo Čebiševe neenačbe) nam da lažjo rešitev problema in izkaže se, da tudi malo bolj natančno. Naj bo $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ množica z različnimi vsotami. Naj bodo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ neodvisne slučajne spremenljivke z verjetnostjo

$$P[\varepsilon_i = 1] = P[\varepsilon_i = 0] = \frac{1}{2}$$

in naj bo $X = \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \ldots + \varepsilon_k x_k$ (o X tudi lahko razmišljamo kot o slučajni spremenljivki). Naj bo

$$\mu = \mathbf{E}[X] = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{2}$$

in $\sigma^2 = \mathrm{Var}[X]$. Omejimo varianco

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2}{4} \leq \frac{n^2 k}{4}$$

in zato je

$$\sigma = \frac{n\sqrt{k}}{2}.$$

S Čebišejevo neenakostjo za vsak $\lambda > 1$ velja

$$P[|X - \mu| \geq \frac{\lambda n \sqrt{k}}{2}] \leq \lambda^{-2}.$$

Po drugi strani pa
$$1-\frac{1}{\lambda^2}\leq P[|X-\mu|<\frac{\lambda n\sqrt{k}}{2}].$$
Ampak X zavzame vrednost z verjetnostjo 0 ali 2^{-k}, ker vsoto lahko dobimo na en sam način. Tako
$$P[|X-\mu|<\frac{\lambda n\sqrt{k}}{2}]\leq 2^{-k}(\lambda n\sqrt{k}+1)$$
in
$$n\geq\frac{2^k(1-\lambda^{-2})-1}{\lambda\sqrt{k}}.$$
Medtem, ko da $\lambda=\sqrt{3}$ optimalen rezultat, nam da vsaka izbira $\lambda\geq 1$:

Izrek 3
$$f(n)\leq\log_2 n+\frac{1}{2}\log_2(\log_2 n)+O(1)$$

3 LOKALNA LEMA

3.1 GEOMETRIJSKI REZULTAT

Družina odprtih enotskih krogel v 3-razsežnem evklidskem prostoru $\mathbb{R}^3$ se imenuje *k-kratno pokritje* $\mathbb{R}^3$, če vsak $x\in\mathbb{R}^3$ pripada vsaj k kroglam. 1-kratnemu pokritju preprosto rečemo kar *pokritje*.

Naj bo F k-kratno pokritje. Rečemo, da je F *nepovezano* k-kratno pokritje, če obstaja particija F v dve paroma disjunktni družini F_1 in F_2, ki sta obe pokritji $\mathbb{R}^3$. Ali drugače, če se da F zapisati kot unija paroma disjunktnih družin F_1 in F_2, ki sta obe pokritji $\mathbb{R}^3$.

Mani-Levitska in Pach (1988) sta dokazala, da za vsak $k\geq 1$ in $k\in\mathbb{Z}$, obstaja povezano k-kratno pokritje $\mathbb{R}^3$ z odprtimi enotskimi kroglami. Po drugi strani pa sta dokazala, da vsako k-kratno pokritje $\mathbb{R}^3$ v katerem nobena točka ni pokrita z več kot $c\,2^{k/3}$ kroglami(kjer je c neka konstanta), je nepovezano, torej ima particijo. To pomeni, da je težje najti particijo pokritja, ki pokriva nekatere točke $\mathbb{R}^3$ velikokrat, kot najti particijo pokritja, ki pokriva vsako točko s približno istim številom odprtih množic.

Preden pa povemo in dokažemo izrek Mani-Pach, pa najprej povejmo še en izrek, ki je dodatek k lokalni lemi in ga bomo potrebovali pri dokazovanju izreka Mani-Pach.

Izrek 4 *Naj bo $H=(V,E)$ hipergraf v katerem ima vsaka povezava največ k elementov. Predpostavimo še, da vsaka povezava H seka največ d drugih povezav. Če je $e(d+1)\leq 2^{k-1}$, potem je hipergraf H 2-obarvljiv.*

Ponovimo še kaj pomeni, da je hipergraf $H=(V,E)$ 2-obarvljiv. To pomeni, da lahko pobarvamo točke iz V z dvema barvama tako, da ni nobena povezava iz E monokromatična, to je da se obe dve različni barvi pojavita v vsaki povezavi.

Izrek 5 (Mani-Pach) *Naj bo množica odprtih krogel $\mathcal{F} = \{B_i\}_{i\in I}$ k-kratno pokritje 3-razsežnega evklidskega prostora. Predpostavimo, da nobena točka $x \in \mathbb{R}^3$ ni vsebovana v več kot t članicah družine $\mathcal{F}$. Če*

$$\frac{e \cdot t^3 2^{18}}{2^{k-1}} \leq 1,$$

potem je $\mathcal{F}$ povezana.

Dokaz: Definirajmo (neskončen) hipergarf $H = (V(H), E(H))$. Množico vozlišč hipergrafa H, torej $V(H)$, naj predstavljajo $\mathcal{F} = \{B_i\}_{i\in I}$. Za vsak $x \in \mathbb{R}^3$ naj bo E_x množica krogel $B_i \in F$, ki vsebujejo x. Množica povezav $E(H)$ je množica E_x-ov. Tu upoštevamo, da če je $E_x = E_y$, predstavljata x in y isto povezavo.

Trdimo, da vsaka povezava E_x seka manj kot $t^3 2^{18}$ drugih povezav E_y hipergrafa H. Če je $x \in B_i$, potem center c_i krogle B_i leži v odprti krogli s središčem v x in radijem 1, torej $c_i \in B(x, 1)$. Če velja $B_i \cap B_j \neq \emptyset$, potem center c_j krogle B_j leži v odprti krogli s središčem v x in radijem 3, torej $c_j \in B(x, 3)$. To pa pomeni, da potem $B_j \subset B(x, 4)$. Tak B_j pokriva točno $4^{-3} = 2^{-6}$ volumna te krogle. Če nobena povezava ni pokrita več kot t-krat, je lahko največ $2^6 t$ takih krogel. Ni težko preveriti, da m krogel v $\mathbb{R}^3$ sekajo $\mathbb{R}^3$ z manj kot m^3 povezanimi komponentami. Zato E_x prekriva največ $(2^6 t)^3$ različnih E_y.

Naj bo zdaj L končen podhipergraf hipergrafa H. Vsaka povezava L ima kvečjemu k vozlišč in seka največ $d < t^3 2^{18}$ostalih povezav L. Po predpostavki je $e(d + 1) \leq 2^{k-1}$. Če sedaj upoštevamo izrek 4, pa vidimo, da je L 2-obarvljiv. To pomeni, da lahko pobarvamo vozlišča L modro in rdeče tako, da ni nobena povezava L monokromatična. Ker to drži za vsak končen L, velja da ima H 2-barvanje.

Ker imamo zdaj 2-barvaje H in nobena povezava ni monokromartična, lahko rečemo, da naj bo $\mathcal{F}_1$ množica vseh modrih krogel in $\mathcal{F}_2$ množica vseh rdečih krogel. Očitno je tudi, da F_1 in F_2 pokrivata cel $\mathbb{R}^3$. ■

Literatura

[1] Noga Alon, Joel H. Spencer, *The probalistic method (Second edition)*, J. Wiley and Sons, New York, 2000.