VERJETNOSTNI RAČUN

Petra Blažič

3. december 2007

1 Neodvisni poskusi in njihova zaporedja

Naj bo $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ množica poskusov. Ti so med sabo *neodvisni*, če so verjetnosti izidov v enem poskusu neodvisne od tega, kaj se zgodi v drugih poskusih oz. če na kakršen koli način iz vsakega od poskusov izberemo po en dogodek, morajo biti ti dogodki med seboj neodvisni. V neskončni množici poskusov so poskusi neodvisni, če so neodvisni v vsaki končni podmnožici.

Zaporedje neodvisnih poskusov $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ imenujemo poskuse, ki so med seboj neodvisni in sestavljajo neskončno zaporedje. Pri tem ne zahtevamo, da so poskusi med seboj enaki, lahko pa so (npr. metanje kocke).

Zaporedje enakih neodvisnih poskusov, kjer se lahko v vsakem poskusu zgodita le dva dogodka, in sicer ali dogodek A z verjetnostjo p $(0 < p < 1)$ ali njegova negacija $\overline{A}$ z verjetnostjo $q = 1 - p$, se imenuje *Bernoullijevo zaporedje*. Klasičen primer zanj je metanje kovanca, v katerem sta res mogoča le dva izida. Sicer pa lahko ponavljanje vsakega poskusa, v katerem ima neki dogodek verjetnost med 0 in 1, obravnavamo kot Bernoullijevo zaporedje. Npr. pri metanju kocke se vprašamo ali vržemo petico ali ne (to je Bernoullijevo zaporedje s $p = 1/6$).

Naloga. *V Bernoullijevem zaporedju želimo ugotoviti, kolikšna je verjetnost, da se bo v n zaporednih ponovitvah poskusa dogodek A zgodil natanko k-krat $(k = 0, 1, \ldots, n)$. V tem poskusu naj ima dogodek A verjetnost p in naj bo $q = 1 - p$.*

Označimo z $B_n(k)$ dogodek, da se A zgodi v n ponovitvah poskusa natanko k-krat in s $P_n(k)$ njegovo verjetnost. Način dogodka $B_n(k)$ je torej produkt n dogodkov, pri katerem je k-krat dogodek A in $(n - k)$-krat $\overline{A}$. Zaradi neodvisnosti dogodkov je verjetnost vsakega načina dogodka $B_n(k)$ enaka

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k}(X_i = A) \cap \bigcap_{i=k+1}^{n}(X_i = \overline{A})\right) = \prod_{i=1}^{k} P(A) \cdot \prod_{i=k+1}^{n} P(\overline{A}) = p^k\, q^{n-k}.$$

Dogodek $B_n(k)$ je natanko določen s k ponovitvami, v katerih se zgodi A. Torej je $B_n(k)$ vsota $\binom{n}{k}$ paroma nezdružljivih dogodkov z verjetnostjo $p^k q^{n-k}$. Zato velja enakost

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \tag{1}$$

ki jo imenujemo *Bernoullijeva formula*. Zanjo velja rekurzivna zveza

$$\begin{aligned} P_n(k) &= \frac{(n-k+1)p}{k\ q}\, P_n(k-1), \qquad k = 1, 2, \dots \\ P_n(0) &= q^n. \end{aligned}$$

Dogodki $B_n(0), B_n(1), \dots, B_n(n)$ tvorijo popoln sistem, zato je

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1,$$

kar sledi tudi po Newtonovi binomski formuli

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = (p+q)^n = 1.$$

Če po binomski formuli razvijemo $(px+q)^n$, je koeficient pri x^k kar $P_n(k)$. Pravimo, da je verjetnost s formulo (1) po dogodkih $B_n(0), B_n(1), \dots, B_n(n)$ *binomsko porazdeljena.*

Primer. *Kolikšna je verjetnost, da bomo v treh metih kocke enkrat dobili šestico?*

Ob upoštevanju, da je $p = 1/6$ in $q = 5/6$, po Bernoullijevi formuli dobimo

$$P_3(1) = \binom{3}{1} p^1 q^{3-1} = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0,35.$$

Naloga. *Kolikšna je verjetnost, da je v n ponovitvah poskusa frekvenca k dogodka A na danem intervalu?*

Naj bosta $a, b \in \mathbb{Z}$ in $0 \leq a < b \leq n$. Zanima nas verjetnost dogodka $C_n(a, b)$, da je $a \leq k < b$, ki jo označimo s $P_n(a, b)$.

Označimo z $B_n(k)$ dogodek, da se A v n ponovitvah poskusa zgodi k-krat. Potem velja zveza

$$C_n(a, b) = B_n(a) + B_n(a + 1) + \cdots + B_n(b - 1).$$

Členi na desni strani so paroma nezdružljivi, zato je

$$P_n(a, b) = P_n(a) + P_n(a + 1) + \cdots + P_n(b - 1).$$

Primer. *Dogodek A ima v poskusu verjetnost $p = 0.02$. Kolikšna je verjetnost, da bo v 50 ponovitvah poskusa frekvenca dogodka A manjša od 3?*

$$P_{50}(0, 3) = P_{50}(0) + P_{50}(1) + P_{50}(2) \approx 0.3642 + 0.3716 + 0.1858 = 0.9216.$$

Naloga (Pascalov obratni problem). *Poskus, v katerem ima A verjetnost p $(0 < p < 1)$, ponavljamo tako dolgo, da se zgodi dogodek A natanko m-krat $(m = 1, 2, 3, \ldots)$. Kolikšna je verjetnost, da se bo zgodil A ravno v n-tem poskusu m-tič $(n \geq m)$?*

Vzemimo, da sta n in m fiksni naravni števili, $D_n(m)$ dogodek, da se zgodi A v n-tem poskusu m-tič in $p_n(m) = P(D_n(m))$. Dogodek $D_n(m)$ se zgodi, če se je v prvih $n - 1$ ponovitvah zgodil A natanko $(m - 1)$-krat in se v n-ti ponovitvi zgodi A. Torej

$$D_n(m) = B_{n-1}(m - 1)A.$$

Dogodka A in $B_{n-1}(m - 1)$ sta neodvisna, zato je

$$p_n(m) = p\ P_{n-1}(m - 1) = \binom{n-1}{m-1} p^m q^{n-m}. \tag{2}$$

Pri tem je $m \in \mathbb{N}$ in $n \geq m$.

Primer. *Strelec strelja v tarčo. Verjetnost, da jo zadane je $1/3$. Kolikšna je verjetnost, da bo tarčo zadel drugič s četrtim strelom in kolikšna je verjetnost, da jo bo zadel drugič vsaj s četrtim strelom?*

Z uporabo formule (2) je prva verjetnost enaka

$$p_4(2) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27},$$

druga pa

$$p_2(2) + p_3(2) + p_4(2) = \frac{1}{9} + \frac{4}{27} + \frac{4}{27} = \frac{11}{27}.$$

Naloga. *Ponavljajmo poskus s popolnim sistemom izidov* $S = \{E_1, E_2, \ldots, E_r\}$. *Vse verjetnosti* $p_j = P(E_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ *naj bodo med* 0 *in* 1*, njihova vsota pa je* 1*.*

Zanima nas verjetnost $P_n(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ dogodka $B_n(k_1, k_2, \ldots, k_r)$, da se v n ponovitvah tega poskusa dogodek E_j zgodi natanko k_j-krat. Pri tem so $k_1, k_2, \ldots, k_r$ poljubna nenegativna cela števila, njihova vsota pa n.

Da bomo lahko določili verjetnost, imejmo vseh n ponovitev poskusa za en sam poskus. Izidi so vsi mogoči produkti n faktorjev, v katerih so faktorji kateri koli izmed dogodkov $E_1, E_2, \ldots, E_r$. Med temi izidi so ugodni tisti, v katerih nastopi faktor E_j natanko k_j-krat. Verjetnost vsakega ugodnega izida je

$$p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r},$$

saj so faktorji v produktu dogodkov med sabo neodvisni. Zanima nas le še koliko je vseh ugodnih izidov. Zato moramo v produktu določiti k_1 mest za faktor E_1, k_2 mest za faktor E_2 in tako naprej do vključno k_r mest za E_r. To je permutacija med n elementi, od katerih je k_1 med seboj enakih in k_2 med seboj enakih in tako naprej do k_r. Teh permutacij je

$$\frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_r!}.$$

Iskana verjetnost je torej

$$P_n(k_1, k_2, \ldots, k_r) = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_r!} \, p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}. \tag{3}$$

Primer. *Naprava izdeluje prvovrstne izdelke z verjetnostjo* 0.10*, izdelke druge vrste z verjetnostjo* 0.30*, izdelke tretje vrste z verjetnostjo* 0.50 *in neuporabne izdelke z verjetnostjo* 0.10*. Kolikšna je verjetnost, da bosta med desetimi zaporednimi izdelki* 2 *prvovrstna,* 3 *druge vrste,* 5 *tretje vrste in da ne bo nobenega neuporabnega izdelka?*

V tem primeru so $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.3$, $p_3 = 0.5$, $p_4 = 0.1$, $n = 10, k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 5$ in $k_4 = 0$. Z uporabo formule (3) dobimo

$$P_{10}(2, 3, 5, 0) = \frac{10!}{2!\ 3!\ 5!\ 0!\ 10^{10}} \ 1^2\ 3^3\ 5^5\ 1^0 \ \approx 0.0213.$$

2 Slučajne spremenljivke

Pri nekaterih poskusih so vsi izidi označeni s števili. Npr. pri metanju kocke je izid število pik, pri n-kratni ponovitvi poskusa pa je izid frekvenca danega dogodka. Na take poskuse lahko gledamo, kot da jim je prirejena neka količina, ki ima lahko različne vrednosti. Od slučaja pa je odvisno katero od mogočih vrednosti ima v dani ponovitvi poskusa, zato to količino imenujemo *slučajna spremenljivka.*

Slučajna spremenljivka je določena s svojo *zalogo vrednosti* in s *porazdelitvenim zakonom.* Slednji je predpis, ki določa kakšna je verjetnost vsake izmed možnih vrednosti ali intervala vrednosti.

Pogoj, da ima slučajna spremenljivka X vrednost x, je dogodek, ki ga zapišemo kot $(X = x)$. Vsi takšni mogoči dogodki sestavljajo *popoln sistem*, saj so paroma nezdružljivi, njihova vsota pa je gotov dogodek.

S slučajno spremenljivko X lahko opišemo še dogodek $(X < x)$, da je vrednost slučajne spremenjljivke X manjša od danega realnega števila x, pa $(X \geq x)$, $(x_1 < X < x_2)$ in podobno.

Glede na zalogo vrednosti slučajne spremenljivke ločimo:

- *diskretne slučajne spremenljivke* - njihova zaloga vrednosti je končna ali števno neskončna,
- *nediskretne slučajne spremenljivke* - njihova zaloga vrednosti je neštevno neskončna. Sem spadajo *zvezno porazdeljene slučajne spremenljivke*, katerih porazdelitvena funkcija $F(x)$ slučajne spremenljivke X se izraža v obliki
$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\ \mathrm{d}t.$$

Zgledi:

- Število pik pri kockanju je diskretna slučajna spremenljivka, saj njeno zalogo vrednosti sestavlja prvih šest naravnih števil.
- Število ponovitev poskusa, ki jih je treba napraviti, da se dogodek A zgodi prvič, je diskretna slučajna spremenljivka z neskončno zalogo vrednosti.

- Pri streljanju v tarčo je razdalja med zadetkom in sredino tarče nediskretna slučajna spremenljivka. Njena zaloga vrednosti je množica vseh (ne prevelikih) realnih števil.

2.1 Porazdelitvena funkcija

Porazdelitvena funkcija je splošna oblika porazdelitvenega zakona (mogoče jo je uporabljati pri vsaki slučajni spremenljivki).

Definicija: *Porazdelitvena funkcija* $F(x)$ slučajne spremenljivke X je funkcija, ki ima za vsak realen x, vrednost enako verjetnosti dogodka $(X < x)$,

$$F(x) = P(X < x), \qquad -\infty < x < \infty.$$

Izrek 1 *Vsaka porazdelitvena funkcija $F(x)$ je naraščajoča. Zanjo veljata zvezi*

$$\begin{aligned} F(-\infty) &= \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \\ F(\infty) &= \lim_{x\to\infty} F(x) = 1. \end{aligned}$$

Dokaz: Naj bosta x_1 in x_2 poljubni realni števili, za kateri velja $x_1 < x_2$. Potem je

$$(X < x_1) \subset (X < x_2)$$

in zato

$$P(X < x_1) \leq P(X < x_2),$$

kar je ravno $F(x_1) \leq F(x_2)$. Porazdelitvena funkcija je torej naraščajoča.

Zvezi v izreku veljata, saj je dogodek $(X < -\infty)$ nemogoč, dogodek $(X < \infty)$ pa gotov. ∎

Izrek 2 *Če sta x_1 in x_2 poljubni realni števili, za kateri velja, da je $x_1 < x_2$, potem velja zveza*

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Dokaz: Očitno je $(X < x_2) = (X < x_1) \cup (x_1 \leq X < x_2)$. Na desni strani te enakosti imamo nezdružljiva dogodka, zato je

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leq X < x_2),$$

kar je

$$F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 \leq X < x_2).$$

∎

2.2 Verjetnostna funkcija

Verjetnostna funkcija je druga oblika porazdelitvenega zakona, ki je primerna pri diskretnih slučajnih spremenljivkah.

Definicija: *Verjetnostna funkcija* p_k diskretne slučajne spremenljivke X ima za vsak mogoči k, vrednost enako verjetnosti dogodka $(X = x_k)$.

$$p_k = P(X = x_k)$$

Pri tem preteče k vse tiste cele vrednosti, za katere spada x_k v zalogo vrednosti slučajne spremenljivke X.

Zalogo vrednosti in verjetnostno funkcijo lahko skupaj zapišemo v *verjetnostno shemo:*

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}.$$

V njej so vsi podatki o diskretni slučajni spremenljivki X.

3 Diskretne porazdelitve

3.1 Enakomerna diskretna porazdelitev

Diskretna slučajna spremenljivka je porazdeljena *enakomerno*, če sestavljajo njeno zalogo vrednosti poljubna realna števila $x_1, x_2, \dots, x_n$ in je za vsak k od 1 do n

$$P(X = x_k) = \frac{1}{n}.$$

Tako je porazdeljena slučajna spremenljivka pri kockanju.

3.2 Binomska porazdelitev

Slučajna spremenjljivka X z zalogo vrednosti $\{0, 1, \dots, n\}$ in verjetnostno funkcijo

$$P_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

je porazdeljena po binomskem zakonu. Pri tem je $n \in \mathbb{N}$ in $0 < p < 1$. Binomsko porazdelitev označimo z $b(n, p)$.

Srečali smo jo že pri nalogah, in sicer če se v n ponovitvah poskusa nek dogodek zgodi natanko k krat.

3.3 Poissonova porazdelitev

Spremenljivka, ki je porazdeljena po Poissonovem zakonu, ima zalogo vrednosti $\{0, 1, 2, \dots\}$ in verjetnostno funkcijo

$$p_k = \frac{a^k e^{-a}}{k!}, \qquad a > 0.$$

Poissonovo porazdelitev bomo označili s $P(a)$.

3.4 Pascalova porazdelitev

Naj bo m poljubno naravno število. Če ima spremenljivka X zalogo vrednosti $\{m, m+1, m+2, \dots\}$ in verjetnostno funkcijo

$$p_k = \binom{k-1}{m-1} p^m (1-p)^{k-m}, \qquad 0 < p < 1 \tag{4}$$

potem pravimo, da je spremenljivka X porazdeljena po Pascalovem zakonu reda m.

V nalogi (Pascalov obratni problem) smo pokazali, da je po tem zakonu porazdeljeno število ponovitev poskusa do m-te ponovitve dogodka A, ki ima v poskusu verjetnost p.

Če je $m = 1$, je funkcija (4) oblike

$$p_k = p(1-p)^{k-1}, \qquad k = 1, 2, 3, \dots. \tag{5}$$

Zaporedje (5) je geometrijsko, zato imenujemo porazdelitev z verjetnostno funkcijo (5) *geometrijska porazdelitev*.

3.5 Hipergeometrijska porazdelitev

Imamo posodo, v kateri je N krogel. M je belih, preostale pa so črne. Iz posode n-krat (na slepo) izberemo po eno kroglo in je ne vrnemo. Da je pri vsakem izbiranju mogoče dobiti kroglo bele ali črne barve predpostavimo, da je $n \le \min(M, N-M)$. Zanima nas verjetnost p_{nk}, da je med n izbranimi kroglami natanko k belih.

Če n-krat izberemo po eno kroglo in je ne vrnemo, je to enakovredno kot če bi hkrati izbrali n krogel. Zato je $\binom{N}{n}$ možnih izidov, ki so enako verjetni. Ugodni pa so tisti, ko izberemo k belih krogel (izmed M) in $n-k$ črnih (izmed $N-M$). Takih izbir je $\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}$, zato je

$$p_{nk} = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \qquad k = 0, 1, \dots, n.$$

Tako porazdelitev imenujemo *hipergeometrijska porazdelitev.*

4 Matematično upanje

Slučajna spremenljivka je dana z zalogo vrednosti in porazdelitvenim zakonom, kar pa je lahko zelo nepregledno. Npr. če je poskus slepo izbiranje študentov na Fakulteti za metematiko in fiziko (FMF), je njegova teža slučajna spremenljivka. Nespametno bi bilo govoriti o tem, koliko študentov je težkih 50 kg, koliko 51 kg in tako dalje. Bolje je povedati povprečno težo študenta na FMF. Pravimo, da je s tem podatkom označena *centralna tendenca* te slučajne spremenljivke. Lahko nas zanima še, kako je skoncentrirana zaloga vrednosti okrog povprečja in podobno. Na ta način izluščimo iz podrobnega opisa slučajne spremenljivke le njene glavne lastnosti, ki jih predstavimo s števili. Le-ta imenujemo *številske karakteristike* slučajne spremenljivke.

Matematično upanje ali *povprečna vrednost* slučajne spremenljivke X, ki je dana z verjetnostno shemo

$$X : \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & \dots, & x_n \\ p_1, & p_2, & p_3, & \dots, & p_n \end{pmatrix},$$

imenujemo izraz

$$m_x = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, p_i.$$

V primeru diskretne slučajne spremenljivke, ki ima neskončno zalogo vrednosti, je matematično upanje definirano kot

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \, p_i,$$

če je

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \, p_i < \infty,$$

sicer rečemo, da matematično upanje ne obstaja.

Za splošno slučajno spremenljivko X, ki ima porazdelitveno funkcijo $F(x)$, je

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, \mathrm{d}F(x),$$

seveda če je

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \, \mathrm{d}F(x) < \infty.$$

Primer. Matematično upanje pri Poissonovi porazdelitvi je

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k a^k}{k!} e^{-a} = a e^{-a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Če uvedemo novo spremenljivko $n = k - 1$, dobimo

$$E(X) = a e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = a e^{-a} e^{a} = a.$$

Torej je parameter a (ta določa Poissonovo porazdelitev) matematično upanje.

Na podoben način bi izračunali matematično upanje pri Binomski porazdelitvi, ki je enako np.

5 Disperzija

X naj bo slučajna spremenljivka, ki ima matematično upanje m_x in je dana z verjetnostno shemo

$$X : \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & \ldots, & x_n \\ p_1, & p_2, & p_3, & \ldots, & p_n \end{pmatrix}.$$

V primeru, da je zaloga vrednosti zelo razpršena okoli m_x, nam matematično upanje ne pove kaj dosti o slučajni spremenljivki. Želimo imeti mero, ki nam bo povedala, kakšna je razpršenost. Za slučajno spremenljivko zato vzamemo

$$(X - m_x)^2 : \begin{pmatrix} (x_1 - m_x)^2, & (x_2 - m_x)^2, & \ldots, & (x_n - m_x)^2 \\ p_1, & p_2, & \ldots, & p_n \end{pmatrix}.$$

Njene vrednosti so kvadrirani odkloni spremenljivke X od m_x, zato je matematično upanje slučajne spremenljivke $(X - m_x)^2$ nenegativno in tem večje, čim bolj je slučajna spremenljivka X razpršena. Primerna mera za razpršenost slučajne spremenljivke X je

$$D(X) = E((X - m_x)^2), \tag{6}$$

kar imenujemo *disperzija ali varianca* slučajne spremenljivke X. Torej je pri diskretni slučajni spremenljivki

$$D(X) = \sum_i (x_i - m_x)^2 \ p_i.$$

Tako za zvezne kot diskretne slučajne spremenljivke pa velja formula

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 \ \mathrm{d}F(x),$$

kjer je $F(x)$ porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X. V primeru, da ta integral ne obstaja, slučajna spremenljivka nima disperzije.

Očitno je

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \ \mathrm{d}F(x) - 2m_x \int_{-\infty}^{\infty} x \ \mathrm{d}F(x) + m_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}F(x)$$

in $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \ \mathrm{d}F(x) = E(x^2)$, $\int_{-\infty}^{\infty} x \ \mathrm{d}F(x) = m_x$ ter $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}F(x) = 1$. Zato lahko disperzijo zapišemo kot

$$D(X) = E(X^2) - m_x^2.$$

Pri disperziji dobijo zelo oddaljene vrednosti večji pomen kot bi bilo potrebno. Zato za mero razpršenosti vzamemo pozitivni kvadratni koren iz disperzije. To količino imenujemo *standardna deviacija* slučajne spremenljivke X in jo označimo s $\sigma(X)$ ali σ_x:

$$\sigma(X) = \sigma_x = \sqrt{D(X)}.$$

Primer. Kolikšna je disperzija pri Poissonovi porazdelitvi $P(a)$?

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{a^k e^{-a}}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)a^k e^{-a}}{k!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k a^k e^{-a}}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)a^k e^{-a}}{k!} + a$$

Izračunajmo vsoto

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)a^k e^{-a}}{k!} = a^2 e^{-a} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a^{k-2}}{(k-2)!} = a^2 e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = a^2$$

Torej je $E(X^2) = a^2 + a$ in zato je $D(X) = a^2 + a - a^2 = a$.

Podobno bi izračunali disperzijo pri Binomski porazdelitvi, ki je enak $np(1-p)$.

6 Momenti

Naj bo X slučajna spremenljivka, $F(X)$ njena porazdelitvena funkcija, k poljubno nenegativno celo število in a poljubno realno število. Če obstaja

$$m_k(a) = E((X-a)^k) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^k \, \mathrm{d}F(x),$$

jo imenujemo *k-ti moment* ali *moment reda k* slučajne spremenljivke X glede na vrednost a.

Količino $M_k(a)$ imenujemo *k-ti absolutni moment* slučajne spremenljivke X glede na vrednost a in jo izračunamo po formuli

$$M_k(a) = E(|X-a|^k) = \int_{-\infty}^{\infty} |x-a|^k \, \mathrm{d}F(x).$$

Začetni moment z_k je moment glede na vrednost 0

$$z_k = m_k(0),$$

centralni moment m_k pa je moment glede na matematično upanje

$$m_k = m_k(E(X)).$$

Matematično upanje slučajne spremenljivke je njen začetni moment prvega reda, disperzija pa centralni moment drugega reda.

Literatura

[1] R. Jamnik, *Verjetnostni račun in statistika*, DMFA, Ljubljana, 1995.

[2] R. Jamnik, *Verjetnostni račun*, Mladinska knjiga, Ljubljana, 1971.

[3] M. Hladnik, *Verjetnost in statistika*, Založba FE in FRI, Ljubljana, 2002.