Uporaba Lovaszove lokalne leme

Petra Blažič

11. februar 2008

1 Barvanje hipergrafov

Pokazali smo že, da so *k-uniformni* hipergrafi z manj kot 2^{k-1} povezavami *2-obarvljivi*. Sedaj pa bomo s pomočjo simetrične Lovasz-eve lokalne leme dokazali podobni rezultat, ki velja za hipergrafe s poljubnim številom povezav, ki pa ne smejo biti preveč incidenčne.

Lema 1 (Simetrična Lovaszova lokalna lema) *Naj bodo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ dogodki, za katere je $P(A_i) \leq p$. Naj za vsak $i = 1, 2, \ldots, n$ velja, da je A_i neodvisen od A_j za vsak $j \neq i$, razen za največ d dogodkov A_j (torej največ d dogodkov A_j je odvisnih od dogodka A_i, $(j \neq i)$). Če je $ep(d+1) \leq 1$ (kjer je e osnova naravnega logaritma), potem je*

$$P[\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i] > 0.$$

Izrek 1 *Naj bo $\mathcal{H}$ hipergraf, v katerem ima vsaka povezava vsaj k točk in je incidenčna z največ d drugimi povezavami. Če je $e(d+1) \leq 2^{k-1}$, potem je $\mathcal{H}$ 2-barvljiv.*

Dokaz. Točke grafa $\mathcal{H}$ pobarvajmo (slučajno) z rdečo ali modro barvo, z verjetnostjo 1/2. Za vsako povezavo f naj A_f označuje dogodek, da je f enobarvna. Ker ima vsaka povezava vsaj k točk, je verjetnost dogodka A_f največ $\frac{2}{2^k} = 2^{1-k}$. Očitno je dogodek A_f neodvisen od A_g, razen tistih, kjer se f in g sekata (teh je največ d).

Poglejmo, koliko je $e\ \mathrm{P}(A_f)\ (d+1)$. Po predpostavki je $e(d+1) \leq 2^{k-1}$, zato je $\mathrm{P}(A_f)\ e\ (d+1) \leq 2^{1-k}\ 2^{k-1} = 1$. Torej lahko uporabimo Lovaszovo lokalno lemo, ki v tem primeru pravi: verjetnost, da nobena povezava ni enobarvna je večja od 0. ∎

2 Usmerjeni cikli

Izrek 2 *Naj bo $D = (V, E)$ usmerjen graf z minimalno izhodno stopnjo δ in maksimalno vhodno stopnjo Δ. Potem za vsak $k \in \mathbb{N}$, za katerega velja*

$$k \leq \frac{\delta}{1 + \ln(1 + \delta\Delta)},$$

D vsebuje usmerjen cikel, dolžine deljive s k.

Dokaz. Oglejmo si podgraf digrafa D, v katerem je izhodna stopnja vsake točke natanko δ. Naj bo $f : V \longrightarrow \{0, 1, \ldots, k-1\}$ naključno barvanje, ki ga dobimo tako, da za vsak $v \in V$ izberemo $f(v)$ neodvisno (in vse z enako verjetnostjo). Z $N^+(v)$ označimo množico točk $\{w : (v, w) \in E\}$ in z A_v dogodek, da nobena točka v $N^+(v)$ ni pobarvana z $f(v) + 1 \pmod{k}$.

Verjetnost dogodka A_v je $p = (\frac{k-1}{k})^\delta = (1 - \frac{1}{k})^\delta$. Trdimo, da je vsak A_v neodvisen od vseh A_w, za katere je

$$N^+(v) \cap (N^+(w) \cup \{w\}) = \emptyset. \tag{1}$$

To pomeni, da w ni naslednik od v ter w in v nimata skupnega naslednika. Toda v je lahko naslednik od w. V tem primeru neodvisnost ni tako očitna kot sicer, toda vseeno drži: celo, če so barve vseh točk, razen $N^+(v)$, že fiksne (natanko določene), bo verjetnost dogodka A_v še vedno enaka $(1 - \frac{1}{k})^\delta$.

Naj d označuje število točk w, ki ne zadošča (1). Potem je

$$d \leq \delta + \delta(\Delta - 1) = \delta\ \Delta.$$

Zato je $ep(d+1) \leq e(1 - \frac{1}{k})^\delta(\delta\ \Delta + 1) \leq e^{1-\delta/k}(\delta\ \Delta + 1)$. Ko uporabimo začetno predpostavko, dobimo

$$e^{1-\delta/k}(\delta\ \Delta + 1) \leq \frac{1}{1 + \delta\ \Delta}(1 + \delta\ \Delta) = 1.$$

Torej je $ep(d+1) \leq 1$. Potem po Lovaszovi lokalni lemi sledi, da je $\mathrm{P}\big[\cap_{i \in V} \bar{A}_i\big] > 0$. To pomeni, da obstaja barvanje pri katerem za vsako točko $v \in V$ obstaja $w \in N^+(v)$, tako da je $f(w) = f(v) + 1 \pmod{k}$.

Sedaj si izberemo poljubno točko $v_0 \in V$, potem lahko generiramo zaporedje $v_0, v_1, v_2, \ldots$, tako da $v_i v_{i+1} \in E$ in $f(v_{i+1}) = f(v) + 1 \pmod{k}$, dokler ne najdemo usmerjenega cikla v D. Glede na to, kako smo skonstruirali barvanje, mora biti dolžina cikla deljiva s k. ■

Literatura

[1] J. Matoušek, J. Vondrak, *The probabilistic method (Lecture Notes)*, http://kam.mff.cuni.cz/ matousek/lectnotes.html.