Naloge iz verjetnostnega računa

Rok Požar

26. november 2007

Naloga. *Kocka ima tri ploskve pobarvane z rdečo, dve z zeleno in eno z belo barvo. Vržemo jo petkrat. Kolikšna je verjetnost dogodka, da bo padla na rdečo in na zeleno ploskev enakokrat?*

Rešitev. Naj R,Z in B v tem vrstnem redu pomenijo padec kocke na rdeče, zeleno in belo obarvano ploskev. Potem je $r = P(R) = \frac{1}{2}$, $z = P(Z) = \frac{1}{3}$ in $b = P(B) = \frac{1}{6}$. Dogodek E, da v petih metih pade kocka na rdečo in na zeleno ploskev enakokrat, razčlenimo v nezdružljive načine:

$$E = BBBBB \cup (BBBRZ \cup \ldots) \cup (BRRZZ \cup \ldots).$$

V prvem oklepaju smo zbrali načine s tremi faktorji B, v drugem smo zajeli vse tiste z enim takšnim faktorjem. Za verjetnost velja:

$$P(E) = b^5 + \binom{5}{2} b^3 \binom{2}{1} rz + \binom{5}{4} b \binom{4}{2} r^2 z^2 = \frac{1201}{7776}.$$

■

Naloga. *V posodi je n kroglic, ki so oštevilčene z $1, 2, \ldots, n$. Slučajno izvlečemo r kroglic.*

a) Kakšna je verjetnost, da je največa številka med izvlečenimi kroglicami m, če kroglice vračamo nazaj v posodo?

b) Kakšna pa je verjetnost, če kroglic ne vračamo v posodo?

Rešitev.

a) Ker kroglice vračamo v posodo, je vseh možnosti n^r. Ugodne možnosti so tiste, kjer izvlečemo samo kroglice s številkami, ki so manjše ali enake m, pri čemer moramo vsaj enkrat izvleči kroglico s številko m. Takšnih možnosti je $m^r - (m-1)^r$. Verjetnost je tako:

$$P = \frac{m^r - (m-1)^r}{n^r}.$$

b) Če kroglic ne vračamo v posodo, potem je vseh možnosti $\binom{n}{r}$. Ugodnih možnosti je $\binom{m-1}{r-1}$, saj število m sigurno izvlečemo, ostane nam še $m-1$ kroglic. Rezultat je:

$$P = \frac{\binom{m-1}{r-1}}{\binom{n}{r}}.$$

■

Naloga. *Osebi A in B izmenjajoče mečeta dve pošteni kocki v tem vrstnem redu. Oseba A zmaga, če prej vrže šest pik, oseba B pa, če prej vrže sedem pik. Če začne oseba A, kolikšna je njegova verjetnost, da zmaga?*

Rešitev. Izračunajmo najprej verjetnost, da oseba A vrže šest pik. Potem je vseh možnosti 36, ugodnih je 5, zato je $p_1 = P(6) = \frac{5}{36}$. Podobno dobimo verjetnost, da oseba B vrže sedem pik: $p_2 = P(7) = \frac{6}{36}$. S q_1 in q_2 označimo še nasprotna dogodka: $q_1 = 1 - p_1 = \frac{31}{36}$ in $q_2 = 1 - p_2 = \frac{30}{26}$. Naj A_k označuje dogodek, da oseba A zmaga v k-tem metu. Potem je verjetnost, da zmaga oseba A:

$$P(A) = \sum_{k=0}^{\infty} P(A_{k+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} q_1^k q_2^k p_1 = \frac{p_1}{1 - q_1 q_2} = \frac{\frac{5}{36}}{1 - \frac{31}{36} \cdot \frac{30}{36}} = \frac{30}{61}$$

■

Naloga. *Na knjižni polici je deset knjig, med njimi trije romani. Ob predpostavki, da so vsi razporedi knjig na polici enako verjetni, izračunaj verjetnost dogodkov:*

A: romani so skupaj, a kjerkoli na polici,

B: prva in zadnja knjiga na polici sta romana,

C: prva ali zadnja knjiga na polici je roman.

Rešitev. Vseh možnih razporedov desetih knjig po polici je 10!. Za izračun $P(A)$ upoštevamo, da lahko skupino vseh romanov obravnavamo kot eno izmed osmih enot (ostale so posamezne knjige, ki niso romani). Seveda so neodvisno od mesta te enote romani lahko še kakorkoli pomešani. Tako je

$$P(A) = \frac{8! \cdot 3!}{10!} = \frac{1}{15}.$$

Prva in zadnja knjiga na polici sta določeni, le izbrati ju moramo med tremi romani in povedati, katera je skrajna leva. Druge knjige lahko razporedimo med izbrana romana kakorkoli. Torej je

$$P(B) = \binom{3}{2} \frac{2 \cdot 8!}{10!} = \frac{1}{15}.$$

Če naj bo prva (zadnja) knjiga roman, lahko preostalih devet razporedimo poljubno. To je mogoče storiti na $\binom{3}{1} \cdot 9!$ načinov. Zato je po formuli za verjetnost vsote dogodkov

$$P(C) = \frac{3 \cdot 9! + 3 \cdot 9!}{10!} - P(B) = \frac{8}{15}.$$

Alternativni razmislek: C je vsota nezdružljivih dogodkov "prva knjiga je roman, zadnja pa ne" in "zadnja knjiga je roman" in zato je

$$P(C) = \binom{3}{1}\binom{7}{1}\frac{8!}{10!} + \frac{3}{10} = \frac{8}{15}.$$

■

Naloga. *V bobnu je sto srečk. Iz njega izžrebamo tri zmagovalne srečke.*

a) Kakšna je verjetnost, da je srečni dobitnik oseba, ki je kupila štiri srečke?

b) Kaj pa, če oseba kupi samo eno srečko?

Rešitev.

a) Izračunajmo verjetnost, da oseba ne zadane (nasprotni dogodek). Potem je vseh možnosti $\binom{100}{3}$, ugodnih pa $\binom{96}{3}$, saj med štirimi kupljenimi srečkami ni nobene izžrebane. Verjetnost, da oseba zadane je torej:

$$P = 1 - \frac{\binom{96}{3}}{\binom{100}{3}}.$$

b) Izračunajmo še verjetnost, da zadane oseba, ki je kupila eno srečko. Vseh možnosti je zopet $\binom{100}{3}$, ugodnih pa $\binom{99}{2}$, saj njegova kupljena srečka zadane. Verjetnost, da zadane je torej:

$$P = \frac{\binom{99}{2}}{\binom{100}{3}}.$$

■

Naloga. *Vrgli bomo igralno kocko, zatem pa še pravilni kovanec tolikokrat, kolikor pik bo padlo na kocki. Poišči verjetnost dogodka, da bomo dobili enako število grbov kot cifer.*

Rešitev. Da bo padlo grbov toliko kot cifer (dogodek A), moramo kovanec metati sodokrat. Če na kocki padeta dve piki (dogodek H_2), je

$$P(A \setminus H_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

pri štirih pikah je ustrezna verjetnost

$$P(A \setminus H_2) = \binom{4}{2}2^{-4} = \frac{3}{8}$$

in pri šestih metih je

$$P(A \setminus H_6) = \binom{6}{3}2^{-6} = \frac{5}{16}.$$

Po formuli za popolno verjetnost sledi:

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{6} = \frac{19}{96}.$$

■

Naloga. *Pet izmed petnajstih srečk pri srečelovu prinaša dobitek. Aleš izbere tri srečke, za njim pa Bojan še dve srečki. Kakšna je verjetnost dogodka, da ima Bojan vsaj en dobitek? Kolikšna je pogojna verjetnost, da ima Bojan vsaj en dobitek, če vemo, da ima Aleš dva dobitka?*

Rešitev. Pišimo $A_n(B_n)$ za dogodek, da ima Aleš (Bojan) natanko n dobitkov, $0 \leq n$, in D dogodek, da ima Bojan vsaj en dobitek. Relacija $D = G - B_0$ narekuje, da izračunamo najprej $P(B_0)$. Za to uporabimo formulo za popolno verjetnost. Pri tem je

$$\begin{aligned}
P(A_0) &= \frac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{24}{91}, \\
P(A_1) &= \frac{\binom{10}{2}\binom{5}{1}}{\binom{15}{3}} = \frac{45}{91}, \\
P(A_2) &= \frac{20}{91} \quad \text{in} \\
P(A_3) &= \frac{2}{91}.
\end{aligned}$$

Podobno izračunamo

$$\begin{aligned}
P(B_0 \setminus A_0) &= \frac{\binom{7}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{21}{66}, \\
P(B_0 \setminus A_1) &= \frac{\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{28}{66}, \\
P(B_0 \setminus A_2) &= \frac{36}{66}, \\
P(B_0 \setminus A_3) &= \frac{45}{66},
\end{aligned}$$

kar da $P(B_0) = \frac{39}{91}$ in $P(D) = \frac{52}{91}$.

Odgovor na drugo vprašanje pravzaprav že imamo:

$$P(D \setminus A_2) = 1 - P(B_0 \setminus A_2) = \frac{5}{11}.$$

■

Naloga. *Na letalo so izstreljeni trije posamezni metki. Verjetnost, da s prvim metkom zadanemo letalo je $\frac{1}{2}$, z drugim $\frac{3}{5}$, s tretjim $\frac{4}{5}$. Verjetnost, da letalo strmoglavimo z enim metkom je $\frac{3}{10}$, z dvema $\frac{3}{5}$, s tremi metki letalo sigurno strmoglavimo. Kolikšna je verjetnost, da je letalo po treh streljanjih strmoglavljeno?*

Rešitev. Letalo lahko strmoglavimo bodisi z enim metkom, bodisi z dvema, bodisi s tremi. Naj bo dogodek A, da je letalo strmoglavljeno, dogodek B_1, da je letalo stroglavljeno z enim metkom, dogodek B_2, da je letalo strmoglavljeno z dvema metkoma in dogodek B_3, da je letalo strmoglavljeno s tremi metki. Izračunajmo posamezne verjetnosti:

$$\begin{aligned}
P(B_1) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{13}{50},\\
P(B_2) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{23}{50},\\
P(B_3) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{6}{25},\\
P(A\setminus B_1) &= \frac{3}{10},\\
P(A\setminus B_2) &= \frac{3}{5},\\
P(A\setminus B_3) &= 1.
\end{aligned}$$

Končna verjetnost je vsota posameznih produktov dogodkov:

$$P(A)=\frac{13}{50}\cdot\frac{3}{10}+\frac{23}{50}\cdot\frac{3}{5}+\frac{6}{25}\cdot 1=\frac{297}{500}.$$

■

Naloga. *V posodi se nahaja b belih in c črnih kroglic. Na slučajen način izvlečemo dve kroglici iz posode. Kolikšna je verjetnost, da v drugem poskusu izvlečemo belo kroglico, če poznamo, da je v prvem poskusom izvlečena bela kroglica?*

Rešitev. Če z A označimo dogodek, da v prvem poskusu izvlečemo belo kroglico, in z B dogodek, da v drugem poskusu izvlečemo belo kroglico, potem je verjetnost

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B\setminus A)=\frac{b}{b+c}\cdot\frac{b-1}{b+c-1}.$$

■

Naloga. *Študent je pozabil zadnjo cifro telefonske številke svojega prijatelja in jo zato izbira na slučajen način.*

a) *Kolikšna je verjetnost, da bo študent klical največ trikrat?*

b) *Če študent ve, da je zadnja cifra liha, kako se potem spremeni verjetnost?*

Rešitev.

a) Študent ugane cifro bodisi v prvem poskusu, bodisi v drugem, bodisi v tretjem. Verjetnost, da jo ugane v prvem poskusu je $\frac{1}{10}$. Verjetnost, da jo ugane v drugem poskusu, je $\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{9}$ (v prvem poskusu ne ugane, v dugem poskusu ugane). Na isti način dobimo verjetnost $\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{8}$, da ugane v tretjem poskusu. Iskana verjetnost je torej

$$P = \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{10}.$$

b) Rešimo problem tako, da najprej izračunamo nasprotni dogodek. To pomeni, da študent ne ugane cifre v treh poiskusih, pri čemer ugiba samo med lihimi ciframi. Verjetnost dogodka, ki jo iščemo, je tako:

$$P = 1 - \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{5}.$$

■

Naloga. *V družbi se nahaja n moških in n žensk, ki se na slučajen način posedejo za okroglo mizo. Kolikšna je verjetnost, da dve osebi istega spola ne sedita eden poleg drugega?*

Rešitev. Ker so vsi sedeži enakovredni (nobeden ni posebno odlikovan), jih lahko postavimo v vrsto, naredimo porazdelitev in jih nato sklenemo v krog. Vseh možnosti je zato $(2n)!$, ugodnih pa $2n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$. Rešitev je:

$$P = 2 \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

■

Naloga. *V posodi je 7 belih kroglic, ki so oštevilčene z $1, 2, \ldots, 7$ in 3 črne, ki so oštevilčene z $8, 9, 10$. Slučajno izvlečemo 5 kroglic, a) z vračanjem, b) brez vračanja.*

Za vsak primer a) in b) poišči porazdelitev:

1) *števila belih kroglic v vzorcu,*

2) *minimalnega števila v vzorcu,*

3) *maksimalnega števila v vzorcu,*

4) *minimalnega števila kroglic, da izberemo belo kroglico.*

Rešitev.

1a)

$$p_k = \binom{5}{k} \left(\frac{7}{10}\right)^k \left(\frac{3}{10}\right)^{5-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, 5 \quad \text{(binomska)}.$$

1b)

$$p_k = \frac{\binom{7}{k}\binom{3}{5-k}}{\binom{10}{5}}, \quad k = 2, 3, 4, 5 \quad \text{(hipergeometrična)}.$$

2a)

$$\begin{aligned}
P[X_{min} > k] &= \frac{(10-k)^5}{10^5}, \\
P[X_{min} = k] &= P[X_{min} > k-1] - P[X_{min} > k] \\
&= \frac{(10-k+1)^5 - (10-k)^5}{10^5}, \quad k = 1, 2, \ldots, 10.
\end{aligned}$$

2b)

$$\begin{aligned}
P[X_{min} > k] &= \frac{(10-k)_5}{(10)_5}, \\
P[X_{min} = k] &= P[X_{min} > k-1] - P[X_{min} > k] \\
&= \frac{(10-k+1)_5 - (10-k)_5}{(10)_5}, \quad k = 5, 6, \ldots, 10.
\end{aligned}$$

3a)

$$\begin{aligned}
P[X_{max} \le k] &= \left(\frac{k}{10}\right)^5, \\
P[X_{max} = k] &= P[X_{max} \le k] - P[X_{min} \le k-1] \\
&= \frac{k^5 - (k-1)^5}{10^5}, \quad k = 1, 2, \ldots, 10.
\end{aligned}$$

3b)

$$\begin{aligned}
P[X_{max} \le k] &= \frac{(k)_5}{(10)_5}, \\
P[X_{max} = k] &= P[X_{max} \le k] - P[X_{max} \le k-1] \\
&= \frac{(k)_5 - (k-1)_5}{(10)_5}, \quad k = 5, 6, \ldots, 10.
\end{aligned}$$

4a)

$$p_k = \left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

4b)

$$p_k = \frac{7(3)_{k-1}}{(10)_k}, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

■

Naloga. *V Bernoullijevem zaporedju se zgodi dogodek A z verjetnostjo p. Zaporedje poskusov prekinemo, ko se dogodek A zgodi r-tič. Naj bo X število poskusov, v katerih se A ni zgodil. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X? Izračunaj matematično upanje!*

Rešitev. Za $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ je $P[X = k] = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k$. Za opisani dogodek so namreč ugodna vsa tista zaporedja poskusov, v katerih se je dogodek A zgodil točno r-krat, poslednjič v zadnjem $(k+r-1)$-tem poskusu. Opazimo, da je slučajna spremenljivka X porazdeljena negativno binomsko. Za matematično upanje seštejemo vrsto

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k\binom{k+r-1}{r-1} p^r(1-p)^k \\ &= \frac{(1-p)r}{p}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{j+r}{r}p^{r+1}(1-p)^j \\ &= \frac{(1-p)r}{p}, \end{aligned}$$

kjer smo upoštevali, da so členi zadnje vrste ravno verjetnosti dogodkov $[X=j]$, če namesto k vzamemo $j+1$. ■

Naloga. *Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_n (n \in \mathbf{N})$ so neodvisne in enako porazdeljene:*

$$P[X_i = k] = \frac{1}{3} \quad \textit{za} \quad k \in \{-1, 0, 1\} \quad \textit{in} \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Izračunaj verjetnost dogodka $X_1 \cdot X_2 \cdots X_n = X_1$.

Rešitev. Če je $X_1 = 0$, je produkt ostalih faktorjev $(X_2 \cdot X_3 \cdots X_n)$ lahko kakršenkoli. Če je $X_1 \neq 0$, pa mora biti produkt ostalih spremenljivk enak 1. Omenjeni produkt ima prav tako kot njegovi faktorji le tri možne vrednosti, zaradi simetričnosti pa sta vrednosti 1 in -1 enako verjetni. Nastopita le, če so vsi faktorji različni od 0. Zaradi neodvisnosti je

$$P[X_2 \cdot X_3 \cdots X_n \neq 0] = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 2 \cdot P[X_2 \cdot X_3 \cdots X_n = 1]$$

in

$$\begin{aligned} P[X_1 \cdot X_2 \cdots X_n = X_1] &= P[X_1 = 0] + P[X_1 \neq 0] \cdot P[X_2 \cdot X_3 \cdots X_n = 1] \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{2^{n-1}}{3^n}. \end{aligned}$$

■

Naloga. *Naj bo $f(x)$ funkcija gostote slučajne spremenljivke X. Predpostavimo, da ima slučajna spremenljivka X simetrično porazdelitev okrog a, tj. $f(x+a) = f(a-x)$ za vsak x. Pokaži, da je matematično upanje $E(x)$ enako a, če obstaja.*

Rešitev. Računajmo

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}(x-a)f(x)\mathrm{d}x + a\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{a}(x-a)f(x)\mathrm{d}x + \int_{a}^{\infty}(x-a)f(x)\mathrm{d}x + a. \end{aligned}$$

Ker je $E(X) < \infty$, naslednji integrali obstajajo

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{a}(x-a)f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{0} yf(y+a)\mathrm{d}y,\\ \int_{a}^{\infty}(x-a)f(x)\mathrm{d}x &= \int_{0}^{\infty} yf(y+a)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

kjer smo vpeljali novo spremenljivko $x = y + a$. Upoštevajmo, da je $f(a+y) = f(a-y)$, in dobimo

$$\int_{-\infty}^{0} yf(y+a)\mathrm{d}y = \int_{0}^{\infty} zf(a+z)\mathrm{d}z,$$

kjer smo vpeljali novo spremenljivko $y = -z$. Očitno je potem $E(X) = a$. ■

Naloga. *Pokaži, da obstajajo vsi momenti m_k $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, če obstaja moment reda n m_n.*

Rešitev. Ker obstaja moment reda n m_n, integral $\int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\mathrm{d}x$ konvergira absolutno, tj.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^n f(x)\mathrm{d}x < \infty.$$

Za vsak $k = 1, 2, \ldots, n-1$ velja

$$|x|^k < |x|^n + 1$$

in zato

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^k f(x)\mathrm{d}x < \int_{-\infty}^{\infty} |x|^n f(x)\mathrm{d}x + 1.$$

■

Naloga. *Naj bo X slučajna spremenljivka in $F_X(x)$ njena porazdelitvena funkcija. Naj bo $Y = X^2$ tudi slučajna spremenljivka. Izračunaj njeno porazdelitveno funkcijo $F_Y(y)$!*

Rešitev. Računajmo

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= P(Y < y) = P(X^2 < y)\\ &= \begin{cases} P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}); & \text{if } y > 0\\ 0; & \text{if } y \leq 0\end{cases}\\ &= \begin{cases} P(X < \sqrt{y}) - P(X \leq -\sqrt{y}); & \text{if } y > 0\\ 0; & \text{if } y \leq 0\end{cases}\\ &= \begin{cases} F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}+); & \text{if } y > 0\\ 0; & \text{if } y \leq 0\end{cases}.\end{aligned}$$

■

Naloga. *Če ima slučajna spremenljivka X začetni moment reda n, ima tudi moment reda n glede na katerokoli drugo realno vrednost a.*

Rešitev. Naj bo n poljubno naravno število in a katerokoli realno število. Ker je matematično upanje linearen funkcional, velja

$$m_n(a) = E((X-a)^n) = E\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k(-a)^{n-k}\right) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}a^{n-k}E(X^k).$$

■

Naloga. *Izračunaj matematično upanje in disperzijo pri binomski porazdelitvi!*

Rešitev. Izračunajmo najprej matematično upanje:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k} \\
&= np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}p^{k-1}q^{(n-1)-(k-1)} \\
&= np\sum_{l=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{l!((n-1)-l)!}p^l q^{(n-1)-l} = np.
\end{aligned}$$

Še disperzija:

$$\begin{aligned}
D(X) &= E(X^2)-(E(X))^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k} - n^2p^2 \\
&= \sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k} - n^2p^2 \\
&= p^2n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!}p^{k-2}q^{(n-2)-(k-2)} + np - n^2p^2 \\
&= p^2n(n-1)\sum_{l=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{l!((n-2)-l)!}p^l q^{(n-2)-l} + np - n^2p^2 = p^2n^2 - p^2n + np - n^2p^2 \\
&= np(1-p).
\end{aligned}$$

■

Literatura

[1] R. Drnovšek, T. Košir, E. Kocbek, G. Lešnjak, *Zbirka rešenih nalog iz verjetnostnega računa*, DMFA, 1998.

[2] S. Vukadinovic, *Zbirka rešenih zadataka iz teorije verovatnoče*, Beograd, 1972.

[3] T. Cacoullos, *Exercises in probability*, Springer-Verlag, 1998.