# Kromatični polinom

R. Škrekovski
16. marec 2016

## Rekurzivna zveza

**Trditev 1** *Naj bo $G$ graf in $e = xy$ povezava v $G$. Potem je*

$$P(G,k) = P(G-e,k) - P(G/e,k). \tag{1}$$

**Dokaz.** Število $k$-barvanj grafa $G-e$, pri katerem sta $x$ in $y$ različno obarvana je $P(G,k)$. Število $k$-barvanj grafa $G-e$, pri katerem sta $x$ in $y$ enako obarvana, je $P(G/e,k)$. Od tod pa zveza takoj sledi. ∎

## Zgled.

Za graf $G = C_5$ so ustrezni polinomi

$$\begin{aligned} P(G-e,x) &= P(P_5,x) = x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 4x^2 + x \\ P(G/e,x) &= P(C_4,x) = 1x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 3x \\ P(G,x) &= P(C_5,x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 4x\,. \end{aligned}$$

# Kromatični polinom in barvna razbitja

*Barvno $k$-razbitje* grafa $G$ je razbitje množice točk $V(G)$ na $k$ nepraznih in disjunktnih podmnožic

$$V_1, V_2, \ldots, V_k,$$

pri čem velja, da je vsaka množica $V_i$ neodvisna v $G$-ju (tj. nobeni dve točki iz $V_i$ nista sosedni). Označimo z $a_k(G)$ število barvnih $k$-razbitij grafa $G$.

Naj bo

$$k_{[i]} = k(k-1)\cdots(k-i+1)\,.$$

**Trditev 2** *Naj bo $G$ graf na $n$ točkah. Potem velja*

$$P(G,k) = \sum_{i=1}^{n} a_i(G) k_{[i]}\,. \tag{2}$$

**Dokaz.** Če je graf $G$ pravilno pobarvan z natanko $i$ barvami, potem barvni razredi tvorijo barvno $i$-razbitje, takih pa je $a_i(G)$. Če je $k$ barv na voljo, potem se vsako tako $i$-razbitje pobarva pravilno na $k_{[i]}$ načinov, kar je skupaj $a_i(G)k_{[i]}$. Za konec opazi, da se vsako barvanje da dobiti na opisani način. ∎

# Nekaj osnovnih lastnosti

Prejšnji dve trditvi implicirata naslednje lastnosti kromatičnega polinoma:

**Trditev 3** *Naj bo $G$ graf na $n$ točkah in z $m$ povezavami. Za kromatični polinom $P(G,k)$ velja:*

(a) *koeficient pri $k^n$ je 1,*

(b) *prosti člen je 0,*

(c) *koeficient pri $k^{n-1}$ je $-m$ (ob predpostavki, da je $G$ enostaven),*

(d) *predznak koeficientov alternira.*

**Dokaz.** Vse trditve se dajo pokazati na podoben način z indukcijo po številu povezav $m$ ter uporabo zveze (1). Za bazo indukcije opazi, da je za $m = 0$ graf $G$ izomorfen grafu $\bar{K}_n$, zanj pa velja $P(\bar{K}_n, k) = k^n$, zato očitno veljajo vse trditve.

Naj bo $e$ poljubna povezava grafa $G$. Grafa $G-e$ in $G/e$ sta manjša in po indukcijski predpostavki privzamemo, da za njiju veljajo trditve. Opazimo, da sta polinoma $P(G-e,k)$ in $P(G/e,k)$ stopnje $n$ in $n-1$. Zveza

$$P(G,k) = P(G-e,k) - P(G/e,k),$$

takoj implicira trditve - obravnavamo vsako posebej. ∎

Naslednja trditev je očitna.

**Trditev 4** *Naj bo $G$ disjunktna unija grafov $G_1$ and $G_2$. Potem,*

$$P(G,k) = P(G_1,k) \cdot P(G_2,k)\,.$$

## Zgled.

Za grafa $P_3 \cup C_3$ ter $K_1 \cup K_2 \cup K_3$ velja

$$\begin{aligned} P(P_3 \cup C_3, x) &= x^6 - 5x^5 + 9x^4 - 7x^3 + 2x^2 \\ P(K_1 \cup K_2 \cup K_3, x) &= x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 2x^3\,. \end{aligned}$$

**Trditev 5** *Stopnja najnižjega neničelnega člena polinoma $P(G,k)$ je enaka številu komponent grafa $G$.*

**Dokaz.** Trditev se pokaže z indukcijo po številu povezav $m$ ter uporabo zveze (1). Za $m = 0$ je $G = \bar{K}_n$ in ta graf ima $n$ komponent. Njegov kromatični polinom je enak $x^n$ in trditev očitno velja.

Zdaj predpostavimo, da trditev velja za $G - e$ in $G/e$. Opazi, da imata $G$ in $G/e$ enako število komponent, recimo $s$. Naj bo $a$ koeficient pri $k^s$ pri $P(G-e,k)$ ter naj bo $b$ koeficient pri $k^s$ pri $P(G/e,k)$. Po indukcijski predpostavki je $b \neq 0$. Če je $a \neq 0$, potem imata $a$ in $b$različen predznak. To je posledica tega, da je $P(G-e,k)$ stopnje $n$, $P(G/e,k)$ pa stopnje $n-1$, ter da jima predznak koeficientov alternira. Posledično je koeficient $a-b$ pri $x^s$ polinoma $P(G,k)$ neničelen. ∎

# Koeficient pri $x^{n-2}$

Za koeficient pri $x^{n-2}$ pokažimo naslednjo trditev.

**Trditev 6** *Naj bo $G$ graf na $n$ točkah ter z $m$ povezavami in $t$ trikotniki. Potem je koeficient pri $x^{n-2}$ polinoma $P(G,x)$ enak*

$$\binom{m}{2} - t\,.$$

**Dokaz.** Trditev lahko dokažemo z indukcijo po številu povezav $m$. Za $m = 0$ je $G = \bar{K}_n$ in opazi, da trditev velja. Zdaj pa dokažimo trditev ob predpostavki, da velja za $G - e$ in $G/e$. Naj bo $t'$ število trikotnikov, na katerih leži povezava $e$. Zato je koeficient pri $x^{n-2}$ polinoma $P(G-e,x)$ enak

$$\binom{m-1}{2} - (t - t')\,,$$

koeficient pri $x^{n-2}$ polinoma $P(G/e,x)$ pa je

$$-(m-1-t')$$

po trditvi $3(c)$, ker moramo odstraniti dodatnih $t'$ povezav, da bi $G/e$ postal enostaven. Njuna razlika nam da željeni rezultat:

$$\binom{m-1}{2} - (t-t') + (m-1-t') = \binom{m}{2} - t\,.$$

■

# Kromatični polinom in $r$-vsota grafov

Rečemo, da je $G$ *$r$-vsota* grafov (za neki $r \geq 1$) $G_1$ in $G_2$, če velja

$$G = G_1 \cup G_2 \quad \text{ter} \quad G_1 \cap G_2 = K_r\,.$$

**Trditev 7** *Naj bo $G$ $r$-vsota grafov $G_1$ in $G_2$. Potem velja*

$$P(G,k) = \frac{P(G_1,k) \cdot P(G_2,k)}{P(K_r,k)}\,.$$

**Dokaz.** Opazi, da se da vsako $k$ barvanje polnega grafa $G_1 \cap G_2$ razširiti na

$$\frac{P(G_i,k)}{k_{[r]}}$$

barvanj grafa $G_i$ za $i = 1, 2$. Podobno se da razširiti na

$$\frac{P(G,k)}{k_{[r]}}$$

barvanj grafa $G_i$. Torej,

$$\frac{P(G,k)}{k_{[r]}} = \frac{P(G_1,k)}{k_{[r]}} \cdot \frac{P(G_2,k)}{k_{[r]}},$$

in ker je $P(K_r,k) = k_{[r]}$, takoj dobimo željeni rezultat. ∎

Takoj dobimo naslednjo posledico.

**Posledica 8** *Naj bo $G$ povezan graf, sestavljen iz blokov $B_1, B_2, \ldots, B_r$. Potem je*

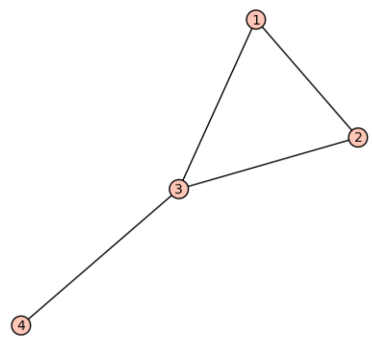
$$P(G,k) = k^{1-r} P(B_1,k) P(B_2,k) \cdots P(B_r,k).$$

# Število acikličnih orientacij grafa

Naj bo $a(G)$ število acikličnih orientacij grafa $G$. Potem velja naslednja trditev.

**Trditev 9** *Za poljuben graf $G$ na $n$ točkah velja*

$$P(G,-1) = (-1)^n a(G)\,.$$




**Zgled.** Za graph $G$ iz slike poišči število acikličnih usmeritev, ter tako zanj preveri trditev. Ustrezni kromatični polinom je

$$P(G,x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x,$$

ter $P(G,-1) = 12$.

**Dokaz.** Z indukcijo po številu povezav $e(G)$. Za $e(G) = 0$ se privzame, da imamo samo eno aciklično usmeritev grafa $\bar{K_n}$ in zato trditev drži. Nato premislimo, da velja zveza

$$a(G) = a(G-e) + a(G/e)$$

za poljubno povezavo $e = xy$ grafa $G$: naj bo $D$ poljubna aciklična orientacija grafa $G$. Opazi, da je $D$ aciklična orientacija tudi za graf $G-e$. Naj bo $D'$ orientacija, ki jo dobimo s spremembo usmeritve povezave $xy$. Tako sta $D$ in $D'$ identična na $G-e$ in tudi na $G/e$. Zdaj opazi, da če je $D'$ aciklična orientacija grafa $G$, potem je tudi aciklična orientacija grafa $G/e$.

Iz zgornje zveze in iz (1) opazi, da tako sledi trditev (pri tem upoštevaj, da je $G/e$ graf na $n-1$ točkah):

$$\begin{aligned} a(G) &= (-1)^n P(G-e,-1) + (-1)^{n-1} P(G/e,-1) \\ &= (-1)^n (P(G-e,-1) - P(G/e,-1)) \\ &= (-1)^n P(G,-1). \end{aligned}$$

∎

# Razširitveni izrek

Naj bo $c(G)$ število komponent grafa $G$. Za poljubno podmnožico povezav $S \subseteq E(G)$ z $G[S]$ označimo podgraf grafa $G$, induciran s povezavami iz $S$. Potem velja naslednji izrek.

**Izrek 10** *Za poljuben graf $G$ velja*

$$P(G,k) = \sum_{S \subseteq E(G)} (-1)^{|S|} k^{c(G[S])}\,. \tag{3}$$

## Zgled.

Preverimo trditev za graph $G$ iz prejšnega zgleda.

V dokazu uporabimo komplementarno pravilo vključitve-izključitve:

$$|A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c| = \sum_{\mathcal{I} \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|\mathcal{I}|} |\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i|, \tag{4}$$

kjer se za $\mathcal{I} = \emptyset$ privzame, da je ustrezni presek kar unija vseh $A_i$-jev.

**Dokaz.** Enakost pokažemo za naravna števila $k$, ker je $P(G,k)$ polinom, potem zveza (3) velja za vsa števila. Obravnavamo vse preslikave $c$ (oz. vsa ne nujno pravilna barvanja) grafa $G$:

$$c : V(G) \to \{1, \ldots, k\},$$

takih je $k^n$, kjer je $n$ število točk grafa. Za povezavo $e = uv$ naj bo $A_e$ množica barvanj, za katere je $e$ monokromatska tj. $c(u) = c(v)$. Število pravilnih barvanj oz. $P(G,k)$ je

$$|A_{e_1}^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{e_m}^c|,$$

kjer je $m$ število povezav grafa $G$. Po pravilu vključitve-izključitve (4) velja, da je to enako

$$\sum_{S \subseteq E(G)} (-1)^{|S|} |\bigcap_{i \in S} A_{e_i}|.$$

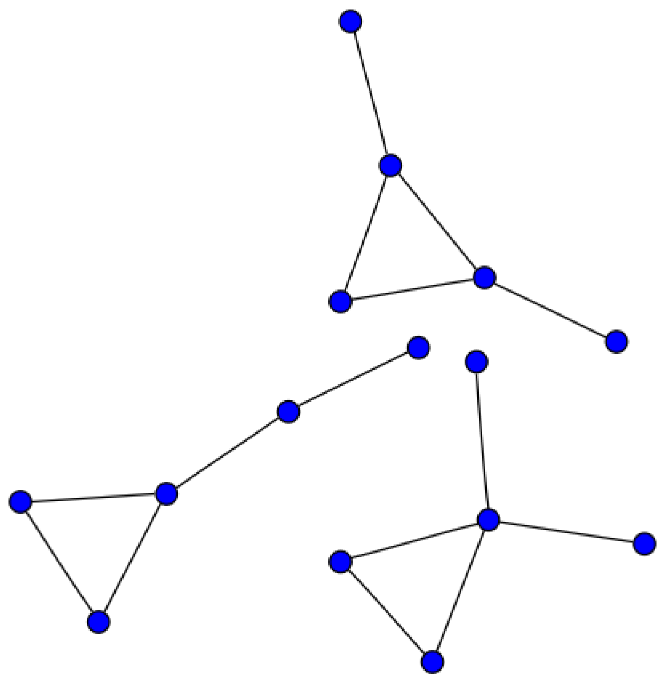
Nazadnje pri vsakem barvanju $c \in \bigcap_{i \in S} A_{e_i}$ opazi, da so točke vsake komponente grafa $G[S]$ enako pobarvane. Zato je moč te množice kar $k^{c(G[S])}$. ∎

# Kromatično ekvivalentni grafi

Grafa $G$ in $H$ sta *kromatično ekvivalentna*, če velja

$$P(G,x) = P(H,x)\,.$$

**Zgled.** Trije grafi s kromatičnim polinomom $x(x-2)(x-3)^3$:



**Raziskovalni problem.** *Klasifikacija kromatično ekvivalentnih grafov oz. iskanje novih grafov, ki so kromatično ekvivalentni.*

# Kromatično enolični grafi

V primeru, da so nekemu grafu $G$ kromatično ekvivalentni samo njemu izomorfni grafi, rečemo, da je $G$ *kromatično enoličen.* Taki graf so cikli $C_n$, njihov kromatični polinom je

$$(x-1)^n + (-1)^n(x-1)\,.$$

**Trditev 11** *$C_n$ je kromatično enoličen graf.*

**Dokaz.** Naj bo $G$ kromatično ekvivalenten ciklu $C_n$. Potem iz prejšnih trditev sledi, da ima $G$ enako število povezav kot $C_n$, to pa implicira, da je $G$ unicikličen graf, tj. graf, sestavljen iz enega cikla, na njegovih točkah pa visijo drevesa. Iz trditve 8 potem sledi, da je polinom takega grafa deljiv s $(x-1)^2$, kar pa ne drži za $P(C_n, x)$. ■

**Raziskovalni problem.** *Karakterizacija kromatično enoličnih grafov oz. iskanje novih razredov grafov, ki so kromatično enolični.*

# Read-ova domneva

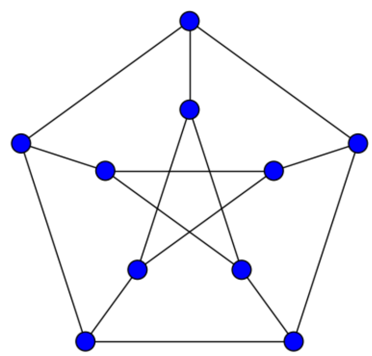
R. C. Read je leta 1968 podal naslednjo domnevo o unimodalnosti koeficientov kromatičnega polinoma:

**Hipteza 1** *Naj bo* $G$ *graf ter* $P(G, x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x$. *Potem obstaja tak* $k$*, da je*

$$|a_n| \leq |a_{n-1}| \leq |a_{n-2}| \leq \cdots \leq |a_k| \geq |a_{k-1}| \geq \cdots \geq |a_2| \geq |a_1|.$$

**Zgled.** Kromatični polinom Peteresenovega grafa je

$x^{10} - 15x^9 + 105x^8 - 455x^7 + 1353x^6 - 2861x^5 + 4275x^4 - 4305x^3 + 2606x^2 - 704x.$



Ustrezno zaporedje je

$$1 < 15 < 105 < 455 < 1353 < 2861 < 4275 < 4305 > 2606 > 704\,.$$

Ne tako dolgo nazaj jo je dokazal June Huh, *Milnor numbers of projective hypersurfaces and the chromatic polynomial of graphs*, J. Amer. Math. Soc., **25** (2012) 907–927.

# Gradiva


- T. Hubai, *The chromatic polynomial - Master Thesis*, https://www.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/mat/2009/hubai_tamas.pdf
- A. Goodall, J. Nesetril, *Graph invariants, homomorphisms, and the Tutte polynomial*, http://kam.mff.cuni.cz/~andrew/Chromatic.pdf
- F. M. Dong, K. M. Koh, and K. L. Teo, *Chromatic polynomials and chromaticity of graphs*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2005, http://www.amazon.com/Chromatic-Polynomials-Chromaticity-Graphs-Dong/dp/9812563172.