Pretoki in pretočni polinom
(UDM 2016)

Definicija pretoka

Utež je funkcija $f : E(G) \to \Gamma$, kjer je Γ Abelova grupa.

Usmeritev grafa je predpis, ki vsaki povezavi določi eno od dveh možnih smeri. S usmeritvijo D grafa G dobimo usmerjeni graf, ki ga bomo označili z $D(G)$.

Usmeritev D bomo obravnavali kot funkcijo, za katero velja:

$$D(u,v) = \begin{cases} 1, & \text{usmeritev povezave } uv \text{ je iz } u \text{ proti } v \\ -1, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Tako za vsako povezavo uv velja $D(u,v) = -D(v,u)$.

Z $N(v)$ in $E(v)$ bomo ustrezno označevali množico točk, sosednih z v in množico povezav, incidenčnih z v v grafu G.

Γ-pretok oz. **pretok** grafa G je urejeni par (D,f), kjer je D usmeritev in f utež grafa G, ki izpolnjuje Kirchoffov pogoj:

$$\forall v \in V(G) : \sum_{u \in N(v)} D(v,u) f(vu) = 0. \tag{1}$$

Včasih nam bo prišlo prav, če razširimo domeno uteži f tudi na točke grafa G z nastavitvijo

$$f(v) := \sum_{u \in N(v)} D(v,u) f(vu)$$

za vsako točko $v \in V(G)$. Takrat je pogoj (1) enakovreden pogoju, da je $f_{|V} \equiv 0$.

Za utež f grafa G je **nosilec** množica povezav $e \in E(G)$, za katere je $f(e) \neq 0$. Nosilec bomo označili s $\mathrm{supp}(f)$.

Pretok (D, f) grafa G je **nikjer-ničelni pretok**, če je $\mathrm{supp}(f) = E(G)$.

Kadar f slika v grupo $(\mathbb{Z}, +)$, par (D, f) imenujemo **celoštevilski pretok**.

k-pretok grafa G je celoštevilski pretok (D, f), pri katerem je $|f(e)| < k$ za vsako povezavo $e \in E(G)$.

k-pretok, pri katerem ima vsaka povezava nenegativno utež, imenujemo **nenegativni k-pretok**.

Če pa ima vsaka povezava pozitivno utež, ga imenujemo **pozitivni k-pretok**.

Pretočno število $\kappa(G)$ grafa G, pomeni najmanjše število k, za katero G dopušča nikjer-ničelni k-pretok. Če tak k ne obstaja, potem definiramo $\kappa(G) = \infty$.

Osnovne lastnosti pretokov

Pri pretokih veljajo naslednje lastnosti:

1. Graf z mostovi ne dopušča nikjer-ničelnega pretoka.

2. Če graf dopušča nikjer-ničelni k-pretok, potem tudi za vsak $h \geq k$ dopušča nikjer-ničelni h-pretok.

3. Naj bo (D, f) (nikjer-ničelni) pretok grafa G in naj bo F poljubna podmnožica množice $E(G)$. Naj bo D_F usmeritev, ki jo dobimo iz D s spremembo smeri vsaki povezavi iz F. Utež f_F definiramo s predpisom:

$$f_F(e) = \begin{cases} f(e), & e \notin F \\ -f(e), & e \in F. \end{cases}$$

Tedaj je par (D_F, f_F) tudi (nikjer-ničelni) pretok grafa G.

4. Če graf G dopušča nikjer-ničelni (k-pretok) pretok za dano usmeritev, potem dopušča tudi nikjer-ničelni (k-pretok) pretok za poljubno usmeritev. Torej, če graf dopušča nikjer-ničelni k-pretok, potem tudi dopušča pozitivni k-pretok.

5. Za dani celoštevilski pretok grafa G naj bo H podgraf grafa G, induciran z liho uteženimi povezavami. Tedaj je H sod graf. Od tod sledi, da graf dopušča nikjer-ničelni 2-pretok natanko takrat, ko je sod.

Naloga 1 *Pošči nikjer-ničelni $\mathbb{Z}_3$-pretok ter nikjer-ničelni 3-pretok v Q_3.*

Naloga 2 *Za kateri k, graf K_4 dopušča nikjer-ničelni k-pretok?*

Naloga 3 *Izračunaj $\kappa(K_n)$, $n \geq 3$?*

Rešitev: Če je n liho potem, $\kappa(K_n) = 2$. Velja, $\kappa(K_4) = 4$.

Naj bo $n \geq 6$ sodo število. Trdimo $\kappa(K_n) = 3$. Graf K_n ni sod, zato je $\kappa(K_n) \geq 3$. Torej bo trditev dokazana, če za vsakega od teh grafov pokažemo z indukcijo, da dopušča nikjer-ničelni 3-pretok.

Naj bo $n = 6$. Graf K_6 lahko razbijemo na po povezavah disjunktne grafe G_1, G_2 in G_3 tako, da je $G_1 \simeq G_2 \simeq K_3$ in $G_3 \simeq K_{3,3}$. Ni težko videti, da vsak od grafov G_1 in G_2 dopušča nikjer-ničelni 3-pretok. Vsota pretokov teh treh grafov inducira nikjer-ničelni 3-pretok v K_6.

Naj bo zdaj $n > 6$. Naj so $\{v_1, \ldots, v_n\}$ točke grafa K_n. Naj bo G_1 podgraf v K_n, induciran s točkami $\{v_1, \ldots, v_{n-2}\}$ in naj bo G_2 induciran s povezavami iz $E(K_n) \setminus E(G_1)$. Tako sta G_1 in G_2 po povezavah disjunktna. Po indukcijski predpostavki G_1 dopušča nikjer-ničelni 3-pretok. Torej bo trditev dokazana, če pokažemo, da tudi G_2 dopušča nikjer-ničelni 3-pretok; potem nikjer-ničelni 3-pretoki grafov G_1 in G_2 inducirajo nikjer-ničelni 3-pretok v K_n. Ni se težko prepričati, da K_2^{n-1} (graf na 2 točkah z $n-1$ povezav med njima) dopušča nikjer-ničelni 3-pretok. Ker je G_2 subdivizija grafa K_2^{n-1} sledi, da tudi G_2 dopušča nikjer-ničelni 3-pretok. To pa je konec rešitve.

Naloga 4 *Dokaži, da graf G dopušča nikjer-ničelni $k_1 \cdot k_2$-pretok, če in samo če dopušča k_1-pretok f_1 in k_2-pretok f_2 s* $\operatorname{supp}(f_1) \cup \operatorname{supp}(f_2) = E(G)$.

Tutte-ova izreka o $\mathbb{Z}_k$-pretokih

Naslednja dva izreka dokažemo kasneje (glej dodatek o modularnih pretokih).

Izrek 1 (Tutte) *Graf dopušča nikjer-ničelni k-pretok natanko takrat, ko dopušča nikjer-ničelni $\mathbb{Z}_k$-pretok.*

Izrek 2 (Tutte) *Naj bo (D, f) $\mathbb{Z}_k$-pretok grafa G. Tedaj G dopušča k-pretok (D, g) tako, da je $f(e) \equiv g(e) \pmod{k}$ za vsako povezavo $e \in E(G)$.*

Trditev 3 *Kubični graf dopušča nikjer-ničelni* 3*-pretok natako takrat, ko je dvodelen.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Naj bo G kubičen graf, ki dopušča nikjer-ničelni 3-pretok (D, f). Opazimo, da je vsaka točka grafa incidenčna z natanko eno povezavo, ki ima utež 2. Naj bo V_1 množica točk grafa G, za katere je incidenčna povezava z utežjo 2 usmerjena iz te točke in naj bo V_2 množica točk grafa G, za katere je incidenčna povezava z utežjo 2 usmerjena k tej točki. Par $\{V_1, V_2\}$ je razbitje množice $V(G)$. Ni težko videti, da med poljubnima dvema točkama iz V_1 oz. V_2 ni povezave. Torej je G dvodelen graf z bi-particijo $\{V_1, V_2\}$.

($\Rightarrow$) Naj bo G dvodelen graf z bi-particijo $\{V_1, V_2\}$. Naj bo D usmeritev grafa G tako, da je vsaka povezava $e = v_1v_2$ ($v_1 \in V_1$ in $v_2 \in V_2$) usmerjena iz v_1 proti v_2 in naj bo f utež, ki vsaki povezavi priredi vrednost 1. Tedaj je par (D, f) $(\mathbb{Z}_3, +_3)$-pretok. Po izreku 1 G dopušča nikjer-ničelni 3-pretok.

■

Število Γ-pretokov

Trditev 4 *Naj bo T vpeto drevo v povezanem grafu G, naj bo D usmeritev grafa G ter naj bo*

$$f : E(G) \setminus E(T) \to \Gamma$$

poljubna preslikava. Potem se f vedno da razširiti do Γ-pretoka. Velja še, da je ta razširitev enolična.

Dokaz. Naj bo v list v T. Obstaja samo ena povezava e iz T, incidenčna z v, ki ji preslikava f ni priredila vrednosti. Ker je usmeritev D že fiksirana, obstaja natako ena vrednost $c \in \Gamma$ tako, da ko postavimo $f(e) = c$, postane Kirchoffov pogoj izpolnjen pri v. Postopek ponovimo tako, da izberemo list v $T - v$ in tako naprej, dokler ne razširimo f na vse povezave. Opazi, da se na koncu postopek ne zaplete, ker velja $f_{|V} \equiv 0$. ∎

Posledica 5 *Naj bo G graf na n točkah z m povezavami in s komponentami. Potem je število Γ-pretokov grafa G enako*

$$|\Gamma|^{m-n+s}.$$

Za graf G na n točkah in z s komponentami rečemo, da ima *rang* $n - s$, tj. definiramo $r(G) = n - s$. Tako imamo, da je število Γ-pretokov grafa G kar

$$|\Gamma|^{|E(G)|-r(G)}.$$

Pretočni polinom

Dobro je znano, da je število različnih k-barvanj grafa G, ki je označeno s $P(G,k)$, polinom z nedoločenko k. Zato se lahko vprašamo, ali je funkcija $F(G,k)$, t.j. število različnih nikjer-ničelnih Γ-pretokov grafa G za vnaprej podano usmeritev D in Abelovo grupo Γ, polinom nedoločenke $k = |\Gamma|$.

Ni se težko prepričati v veljavnost naslednje trditve.

Trditev 6 *Funkcija $F(G,k)$ ima naslednje lastnosti:*

(1) $F(G,k) = 0$, če je G povezava;

(2) $F(G,k) = k-1$, če je G zanka;

(3) $F(G,k) = (k-1)F(G \setminus e, k)$, če je $e \in E(G)$ zanka;

(4) $F(G,k) = F(G/e,k) - F(G \setminus e, k)$, če $e \in E(G)$ ni zanka.

Iz zgornje lastnosti je razvidno, da je $F(G,k)$ dobro definiran polinom z nedoločenko k.

Naloga 5 *Izračunaj $F(K_4,3)$ ter $F(K_4,4)$!*

Naslednja trditev sledi takoj.

Trditev 7 *Naj bo v prerezna točka grafa G ter naj velja $G_1 \cup G_2 = G$ ter $G_1 \cap G_2 = \{v\}$. Potem velja*

$$F(G,k) = F(G_1,k) \cdot F(G_2,k).$$

Razširitveni izrek

Naslednji izrek nam poda $F(G,k)$ v polinomski obliki. Označimo z $r(F)$ rang podgrafa v G, ki je induciran z množico povezav $F \subseteq E(G)$, tj. $r(F) = r(G[F])$.

Izrek 8 (Tutte) *Naj bo Γ končna Abelova grupa reda k in naj bo D poljubna usmeritev grafa usmeritev D je število nikjer-ničelnih Γ-pretokov grafa G*

$$F(G,k) = \sum_{F \subseteq E(G)} (-1)^{|E(G) \setminus F|} k^{|F|-r(F)}. \tag{2}$$

Dokaz. Obravnavamo vse pretoke f (oz. vse ne nujno nikjer-ničelne pretoke) grafa G:

$$f : E(G) \to \{1, \ldots, k\}.$$

Za povezavo $e = uv$ naj bo A_e množica takih pretokov, za katere je $f(e) = 0$. Število nikjer-ničelnih Γ-pretokov oz. $F(G,k)$ je

$$|A^c_{e_1} \cap A^c_2 \cap \cdots \cap A^c_{e_m}|,$$

kjer je m število povezav grafa G. Po pravilu vključitve-izključitve velja, da je to enako

$$\sum_{S \subseteq E(G)} (-1)^{|S|} |\bigcap_{i \in S} A_{e_i}|.$$

Naj bo $F = E(G) \setminus S$ za S iz zgornje vsote. Nazadnje pri vsakem pretoku $f \in \bigcap_{i \in S} A_{e_i}$ opazi, da je $\mathrm{supp}(G)$ vsebovan v F in od tod hitro sledi, da je $|\bigcap_{i \in S} A_{e_i}|$ enako številu Γ-pretokov grafa $G[F]$, ki pa je $k^{|F|-r(F)}$ po posledici 5. Zato je zadnja vsota enaka naslednji

$$\sum_{F \subseteq E(G)} (-1)^{|E(G) \setminus F|} k^{|F|-r(F)},$$

kar zaključi dokaz. ∎

Zgornji izrek neposredno implicira naslednjo posledico. Omenimo samo, da zaenkrat še ni znan konstruktiven dokaz za (b).

Posledica 9 *Naj bosta* Γ_1 *in* Γ_2 *Abelovi grupi reda* k *in naj bo* G *poljuben graf.*

(a) Za poljubno usmeritev D *grafa* G *je število nikjer-ničelnih* Γ_1*-pretokov grafa* G *enako številu nikjer-ničelnih* Γ_2*-pretokov grafa* G*.*

(b) Graf G *dopušča nikjer-ničelni* Γ_1*-pretok natanko takrat, ko dopušča nikjer-ničelni* Γ_2*-pretok.*

Spodnja trditev takoj sledi iz zgornje posledice, če bi obravnavali $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-pretoke.

Trditev 10 *Kubični graf dopušča nikjer-ničelni* 4*-pretok natanko takrat, ko je po povezavah 3-obarvljiv.*

Naloga 6 *Izračunaj* $\kappa(P_{10})$*.*

Pretoki in barvanja grafov

Obstaja zelo zanimiva zveza med celoštevilskimi pretoki in barvanji grafov. Namreč, vsak nikjer-ničelni k-pretok ravninskega grafa inducira k-barvanje dualnega grafa in obratno. Torej se izkaže, da je teorija k-pretokov na nek način naravna posplošitev teorije barvanj ravninskih zemljevidov.

Izrek 11 (Tutte) *Ravninski graf G je po licih k-obarljiv natanko takrat, ko dopušča nikjer-ničelni k-pretok.*

Dokaz. ($\Leftarrow$). Naj bo λ k-barvanje lic grafa G, kjer so barve elementi množice $\{0, 1, \ldots, k-1\}$. Usmeritev D in utež f grafa G definiramo takole. Naj bo $e = uv \in E(G)$ poljubna povezava iz G in naj bosta F_1 in F_2 lici, incidenčni z e. Povezavo e usmerimo tako, da je lice z večjo barvo na njeni desni strani. Za utež pa naj velja $f(e) = |\lambda(F_1) - \lambda(F_2)|$.

Trdimo, da je (D, f) nikjer-ničelni k-pretok grafa G. Naj bo v poljubna točka grafa G. Označimo z $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vse sosede točke v, naštete v vrstnem redu, ki ga dobimo, kadar se sprehajamo okrog točke v v smeri urinega kazalca in označimo z e_i povezavo vv_i. Naj bo F_i lice, čigar rob vsebuje eno za drugo povezave e_i in e_{i+1}, $i = 1, \ldots, k \pmod k$. Z indukcijo ni težko pokazati, da velja naslednja zveza

$$\lambda(F_i) = \lambda(F_k) + \sum_{j=1}^{i} D(v, v_j) f(vv_j)$$

za vsak $i = 1, \ldots, k$. In v primeru, kadar je $i = k$, dobimo

$$\sum_{j=1}^{k} D(v, v_j) f(vv_j) = 0.$$

To pa je pogoj (1) in ker je $0 < f(e) < k$, za vsako povezavo $e \in E(G)$ sledi, da je par (D, f) nikjer-ničelni k-pretok.

($\Rightarrow$). Zdaj pokažimo, da je G po licih k-obarvljiv, če obstaja nikjer-ničelni pretok (D, f) grafa G. Barvanje $\lambda : F(G) \to \{0, 1, \ldots, k-1\}$ konstruiramo na naslednji način. Najprej izberemo eno lice in ga poljubno obarvamo. Potem ponovimo naslednji postopek, dokler niso vsa lica obarvana: izberi eno neobarvano lice F_u, ki ima za soseda že obarvano lice, recimo F_c; naj bo e povezava, incidenčna z obema licema F_u in F_c; licu F_u priredimo barvo $\lambda(F_u)$ tako, da velja:

$$\lambda(F_u) \equiv \lambda(F_c) \pm f(e) \pmod{k} \tag{3}$$

z operacijo $'+'$, kadar je F_c na desni strani povezave e in z operacijo $'-'$ sicer.

V nadaljevanju bomo pokazali, da je λ dobro definirana. In ker je f nikjer-ničelni k-pretok, bomo dobili, da je λ pravilno po licih k-barvanje grafa G.

Naj bo neobarvano lice F_0, incidenčno z obarvanima licema F_a in F_b in naj bo e_i povezava med licema F_0 in F_i, $i = a, b$. Lahko privzamemo, da je F_0 na desni strani povezave e_a in na levi strani povezave e_b. Dovolj bo, če pokažemo, da je

$$\lambda(F_a) - f(e_a) \equiv \lambda(F_b) + f(e_b) \pmod{k}. \tag{4}$$

Ni težko videti, da obstaja prerezna množica $X = \{e_0 = e_a, e_1, \ldots, e_{n-1} = e_b\}$, kjer e_i in e_{i-1} ležita na istem licu F_i, $i = 0, \ldots, n-1$ (indeksiramo po modulu n). Tedaj je $F_1 = F_a$ ter $F_{n-1} = F_b$. Lahko predpostavimo, da je F_i zmeraj na desni strani povezave e_i. Potem imamo:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(e_i) = 0 \tag{5}$$

in za $i = 1, \ldots, n-2$

$$\lambda(F_{i+1}) \equiv \lambda(F_i) + f(e_i) \pmod{k}. \tag{6}$$

Iz (5) in (6) ni težko izpeljati (4). To pa je konec dokaza. ■

Tuttove domneve

Prvi dve domnevi, ki ju je postavil Tutte, govorita o zgornji meji pretočnega števila.

Domneva o zgornji meji. *Obstaja tako naravno število k, da vsak graf brez mostov dopušča nikjer-ničelni k-pretok.*

Domneva o 5-pretoku. *Vsak graf brez mostov dopušča nikjer-ničelni 5-pretok.*

Domnevo o zgornji meji sta neodvisno dokazala Kilpatrick in Jaeger. Oba sta pokazala, da je zgornja meja 8. Kasneje je Seymour pokazal, da je tudi število 6 zgornja meja. To je hkrati tudi najboljši približek Domnevi o 5-pretoku. Torej za vsak graf G brez mostov je $\kappa(G) \leq 6$.

Domneva o 5-pretoku je posplošitev trditve, da je vsak ravninski graf 5-obarvljiv. Vemo, da Petersenov graf ne dopušča nikjer-ničelnega 4-pretoka. Torej v tej domnevi ne moremo zamenjati 5 s 4.

Naslednja Tuttova domneva govori o posplošitvi Izreka štirih barv. Iz izreka 11 in iz Izreka štirih barv dobimo naslednji rezultat.

Posledica 12 *Vsak ravninski graf brez mostov dopušča nikjer-ničelni 4-pretok.*

Petersenov graf ne dopušča nikjer-ničelnega 4-pretoka in se ne da vložiti v ravnino. Tutte je nekdanjo Domnevo o štirih barvah posplošil takole.

Domneva o 4-pretoku. *Vsak graf brez mostov, ki ne vsebuje subdivizije Petersenovega grafa, dopušča nikjer-ničelni 4-pretok.*

Domneva o 4-pretoku je tesno povezana z naslednjo Tuttovo domnevo.

Domneva o 3-barvanju povezav. *Vsak kubičen graf brez mostov, ki ne vsebuje subdivizije Petersenovega grafa, je po povezavah 3-obarvljiv.*

Znani Grötzschev izrek pravi, da je vsak ravninski graf brez zank in trikotnikov 3-obarvljiv. Iz dualnosti sledi, da je vsak ravninski graf brez 1- in 3-prerezov po licih 3-obarvljiv.

Posledica 13 *Vsak ravninski graf brez mostov in 3-prerezov dopušča nikjer-ničelni 3-pretok.*

Tuttova zadnja domneva o pretokih govori o posplošitvi zgornje posledice.

Domneva o 3-pretoku. *Vsak graf brez mostov in brez 3-prereza dopušča nikjer-ničelni 3-pretok.*

Dodatek: Modularni pretoki

Modularni k-pretok grafa G je urejeni par (D, f), kjer je D usmeritev grafa G in $f : E(G) \to \mathbb{Z}$ tako, da velja:

$$\forall v \in V(G) : \sum_{u \in N(v)} D(v,u) f(vu) \equiv 0 \pmod{k} \tag{7}$$

Nosilec modularnega k-pretoka (D, f) je množica povezav $e \in E(G)$, za katero je $f(e) \not\equiv 0 \pmod{k}$ in jo označimo s $\mathrm{supp}_k(f)$. Modularni k-pretok (D, f) je *nikjer-ničelni*, če je $\mathrm{supp}_k(f) = E(G)$.

Tutte je dokazal naslednji izrek o modularnih k-pretokih.

Izrek 14 *Graf G dopušča nikjer-ničelni k-pretok natanko takrat, ko dopušča nikjer-ničelni modularni k-pretok.*

Pomembnost modularnih k-pretokov nam kaže zgornji izrek. Torej v splošnem ne bo nič narobe, če pri dokazovanju, da graf dopušča k-pretok, pogoj (1) nadomestimo s šibkejšim pogojem (7). V praksi se izkaže, da si na ta način delo precej olajšamo.

Lema 15 *Za dani graf G naj bo D usmeritev in $f : E(G) \to \mathbb{R}^+$ utež. Predpostavimo, da za točko $u \in V(G)$ velja $f(u) > 0$. Tedaj obstaja točka $v \in V(G)$ s $f(v) < 0$ in obstaja usmerjena pot od u do v.*

Dokaz. Predpostavimo, da lema ne velja. Očitno je, da obstaja točka z negativno utežjo, t.j. obstaja $x \in V(G)$ z $f(x) < 0$. Torej naj ne obstaja usmerjena pot od točke u do nobene od točk z negativno utežjo. Označimo s U množico točk grafa, do katerih obstaja usmerjena pot iz u. Ob predpostavki, da za vsako točko $x \in U$ velja $f(x) \geq 0$, izpeljimo

$$\begin{aligned} 0 &< \textstyle\sum_{v \in U} f(v) \\ &= \textstyle\sum_{v \in U} \sum_{x \in N(v)} D(v,x) f(vx) \\ &= \textstyle\sum_{v \in U} \sum_{x \in N(v) \setminus U} D(v,x) f(vx) \\ &= -\textstyle\sum_{v \in U} \sum_{x \in N(v) \setminus U} f(vx) \leq 0. \end{aligned}$$

To pa nas pripelje do protislovja. ∎

Da dokažemo izrek 14, potrebujemo naslednje definicije. Naj bo (D, f) modularni k-pretok grafa G in naj bo $F \subseteq E(G)$. Usmeritev D_F grafa G dobimo iz D tako, da spremenimo smer vsaki povezavi iz F. Utež f_F pa definiramo takole:

$$f_F(e) = \begin{cases} k - f(e), & e \in F \\ f(e), & e \notin F. \end{cases}$$

Ni težko videti, da je par (D_F, f_F) ravno tako modularni k-pretok. Za poljubno točko v grafa G in poljubno podmnožico povezav $F \subseteq E(G)$ definirajmo

$$f_F(v) = \sum_{u \in N(v)} D_F(v, u) f_F(vu) \qquad \text{in} \qquad \eta(F) = \sum_{v \in V(G)} |f_F(v)|.$$

Lema 16 *Naj ima graf G modularni k-pretok (D, f) tako, da je $0 < f(e) < k$ za vsako povezavo $e \in E(G)$. Potem obstaja podmnožica $F \subseteq E(G)$, za katero je (D_F, f_F) pozitiven k-pretok.*

Dokaz. Kadar obstaja podmnožica $F \subseteq E(G)$ z $\eta(F) = 0$, je par (D_F, f_F) pozitiven k-pretok. Zato predpostavimo, da za vsako podmnožico $F \subseteq E(G)$ velja $\eta(F) > 0$. Zdajle pa naj bo neprazna podmnožica $F \subseteq E(G)$ s čim manjšim $\eta(F) > 0$. Po lemi 15 obstajata točki u in v tako, da je $f(u) > 0$ in $f(v) < 0$ in obstaja usmerjena pot $P = (u =) w_0 \cdots w_n (= v)$, kjer je $f(w_i) = 0$ za $i = 1, \ldots, n-1$. Naj bo $F' = F \oplus E(P)$. Tedaj pa velja

$$f_{F'}(w_i) = f_F(w_i) \quad \text{za} \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

ter

$$f_{F'}(u) = f_F(u) - k \quad \text{in} \quad f_{F'}(v) = f_F(v) + k.$$

Od tod sledi, da je $\eta(F') < \eta(F)$. To pa nasprotuje minimalnosti $\eta(F)$. ■

Zdaj izpeljimo naslednjo posledico oz. izrek 2.

Posledica 17 *Naj bo (D, f) modularni k-pretok grafa G. Tedaj G dopušča k-pretok (D, g) tako, da je $f(e) \equiv g(e) \pmod k$ za vsako povezavo $e \in E(G)$.*

Dokaz. Naj bo f_1 utež, za katero velja:

$$\forall e \in E(G) : f_1(e) \equiv f(e) \pmod{k_1} \text{ in } 0 < f_1(e) < k.$$

Par (D, f_1) je modularni k-pretok s $\mathrm{supp}_k(f_1) = \mathrm{supp}_k(f)$. Po lemi 16 obstaja podmnožica $F \subseteq E(G)$ tako, da je (D_F, f_{1F}) nenegativen k-pretok s $\mathrm{supp}(f_{1F} = \mathrm{supp}_k(f_1)$. Definirajmo

$$g(e) = \begin{cases} -f_{1F}(e), & e \in F \\ f_{1F}(e), & e \notin F. \end{cases}$$

Za vsako povezavo e velja naslednje

$$f(e) \equiv f_1(e) \equiv \left\{ \begin{array}{ll} -f_{1F}(e), & e \in F \\ f_{1F}(e), & e \notin F \end{array} \right\} = g(e) \pmod{k}.$$

Torej je (D, g) iskani k-pretok. ∎

Dokaz izreka 14. Jasno, vsak k-pretok je tudi modularni k-pretok. Tako nam preostane, da pokažemo samo še drugo smer. Naj bo (D, f) modularni nikjer-ničelni k-pretok grafa G. Trditev 17 nam zagotovi, da obstaja k-pretok (D, g) tako, da je $f(e) \equiv g(e) \pmod{k}$. Zato je $g(e) \neq 0$ za vsako povezavo $e \in E(G)$. Torej je (D, g) nikjer-ničelni k-pretok grafa G. ∎

Lahko je videti, da je vsak nikjer-ničelni $(\mathbb{Z}_k, +_k)$-pretok grafa G tudi nikjer-ničelni modularni k-pretok. Zdaj pa naj bo (D, f) poljubni nikjer-ničelni modularni k-pretok grafa G. Označimo s F množico negativno utežene povezave grafa G. Definirajmo utež g takole

$$\forall e \in E(G) : f_F(e) \equiv g(e) \pmod{k} \text{ in } 1 \leq g(e) \leq k - 1.$$

Tedaj je par (D_F, g) nikjer-ničelni $(\mathbb{Z}_k, +_k)$-pretok. Tale kratek premislek nas pripelje do sklepa, da graf dopušča nikjer-ničelni $(\mathbb{Z}_k, +_k)$-pretok natanko takrat, ko dopušča nikjer-ničelni modularni k-pretok. Tako smo z dokazom izreka 14 dokazali tudi naslednjo posledico, oz. izrek 1.

Posledica 18 *Graf dopušča nikjer-ničelni k-pretok natanko tedaj, ko dopušča nikjer-ničelni $(\mathbb{Z}_k, +_k)$-pretok.*