Kazalo

POGLAVJE 1

Števila

1.1. Naravna števila $\mathbb{N}$

Z naravnimi števili štejemo. Množico naravnih števil označimo z

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Množica naravnih števil je *zaprta* za algebraični operaciji seštevanje $(+)$ in množenje $(\cdot)$. To pomeni, da poljubni dve naravni števili $a, b \in \mathbb{N}$ lahko seštejemo in zmnožimo, in bosta oba rezultata, $a+b$ ter ab prav tako naravni števili. Operaciji odštevanje in deljenje lahko le deloma izvajamo znotraj naravnih števil, saj v tem primeru rezultata nista nujno naravni števili. Naravna števila lahko tudi *linearno uredimo* po velikosti: $1 < 2 < 3 < \cdots$.

Peanovi aksiomi in princip matematične indukcije. V matematiko lahko naravna števila formalno vpeljemo s pomočjo Peanovih aksiomov, imenovanih po italijanskem matematiku Giuseppeju Peanu (1858-1932). Ti aksiomi so

- P1. 1 je naravno število
- P2. Vsako naravno število n ima naslednika n^+, ki je tudi naravno število.
- P3. Naravno število 1 ni naslednik nobenega naravnega števila.
- P4. Če je $n^+ = m^+$ je $n = m$.
- P5. (Aksiom o matematični indukciji) Vsaka podmnožica naravnih števil, ki vsebuje število 1 in z vsakim številom n vsebuje tudi naslednika n^+, vsebuje vsa naravna števila.

Aksiom matematične indukcije nam omogoča način, kako lahko veljavnost neke izjave preverimo za vsa naravna števila. Poglejmo si nekaj primerov.

Primer. Pokažimo, da za vsako naravno število n velja enakost

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Označimo z $A \subset \mathbb{N}$ podmnožico naravnih števil, za katera zgornja formula velja. Preverimo najprej, da je $1 \in A$, oziroma, da za naravno število 1 zgornja formula velja. Ta korak imenujemo *baza indukcije*.

Baza indukcije. $1^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot1+1)}{6} = 1$, torej $1 \in A$.

Pokažimo sedaj, da iz *indukcijske predpostavke*, da za naravno število n zgornja formula velja, sledi, da formula velja tudi za število $n+1$. Povedano drugače, če je $n \in A$ je tudi $n+1 \in A$. Temu koraku rečemo *indukcijski korak*.

Indukcijski korak.

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$\Rightarrow 1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}:$$

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.
\end{aligned}$$

S tem smo pokazali, da je tudi $n+1 \in A$. Oba koraka skupaj nam s pomočjo aksioma P5 (in tudi zdrave pameti) povesta, da je $A = \mathbb{N}$ in s tem formula velja za vsa naravna števila.

Primer. Pokažimo, da za vsako naravno število n velja

$$4|3^{2n-1} + 1.$$

Naj bo zopet $A \subset \mathbb{N}$ podmnožica naravnih števil, za katera trditev velja.

Baza indukcije. Za $n = 1$ velja $4|3^{2\cdot 1-1} + 1$ oz. $4|4$. Torej $1 \in A$.

Indukcijski korak. $4|3^{2n-1} + 1 \Rightarrow 4|3^{2(n+1)-1} + 1$: Lahko pišemo

$$3^{2(n+1)-1} + 1 = 3^{2n+1} + 1 = 9 \cdot 3^{2n-1} + 1 = 9(3^{2n-1} + 1) - 8.$$

Ker po indukcijski predpostavki $4|3^{2n-1} + 1$ in ker $4|8$, $4|9(3^{2n-1} + 1) - 8$. Torej velja, da če je $n \in A$ je tudi $n + 1 \in A$. S pomočjo aksioma o matematični indukciji je $A = \mathbb{N}$ in s tem trditev dokazana.

Aksiom matematične indukcije 'olajša' dokazovanje trditev o naravnih številih, saj pri dokazovanju trditve za splošno naravno število n lahko dodatno predpostavimo, da trditev že velja za vsa predhodna naravna števila.

1.2. Cela števila $\mathbb{Z}$

Cela števila $\mathbb{Z}$ so razširitev naravnih števil z negativnimi naravnimi števili in številom 0. Torej

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Cela števila so zaprta za seštevanje in množenje, in ker ima vsako celo število $a \in \mathbb{Z}$ tudi svoj obratni element $-a \in \mathbb{Z}$, je množica celih števil zaprta tudi za odštevanje. Še vedno pa ne moremo svobodno deliti dve števili (npr. $5/3 \notin \mathbb{Z}$).

1.3. Racionalna števila $\mathbb{Q}$

Racionalna števila so tista števila, ki jih lahko predstavimo kot kvocient dveh celih števil, torej kot ulomek $\frac{a}{b}$, pri čemer $b \neq 0$. Kot vemo, dva ulomka $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ predstavljata isto racionalno število, če je $ad = bc$. Racionalna števila so zato formalno definirana kot kvocientna množica

$$\{(a, b);\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}/\sim, \quad (a, b) \sim (c, d) \text{ če } ad = bc.$$

Ulomki so torej skoraj sinonim za racionalna števila, razlika je v tem, da sta na primer formalno gledano $\frac{1}{2}$ in $\frac{2}{4}$ različna ulomka, vendar predstavljata isto racionalno število.

V množici racionalnih števil lahko seštevamo

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

in množimo

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

odštevanje in deljenje pa razumemo kot seštevanje z obratnim številom $-\frac{c}{d}$ oziroma množenje z inverznim številom $\frac{d}{c}$. Seveda z 0 ne smemo deliti. Racionalna števila so zaprta za vse te operacije.

1.4. Realna števila $\mathbb{R}$

Racionalna števila povsem zadoščajo, če želimo v naši številski množici uporabljati osnovne računske operacije: seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje. Iz naslednje preproste geometrijske naloge lahko vidimo, da množici racionalnih števil vseeno nekaj manjka: Kolikšna je dolžina diagonale kvadrata s stranico 1?

Po Pitagorovem izreki je $d^2 = 2$. Recimo, da je $d = a/b$, kjer sta a, b celi števili, in je ulomek okrajšan (največji skupni delitelj a in b je 1). Torej je $a^2/b^2 = 2$ in zato

$$a^2 = 2b^2.$$

Ker 2 deli desno stran, mora tudi levo, in ker je 2 praštevilo, mora 2 deliti a. Zato 4 deli levo stran, in po krajšanju ugotovimo, da mora 2 deliti tudi b. Ker smo predpostavili, da je ulomek okrajšan, smo tako dobili protislovje. S tem smo pokazali, da kvadrat nobenega racionalnega števila ne mora biti enak 2. Diagonala kvadrata s stranico 1 nedvomno obstaja, saj jo lahko skonstruiramo, in ker mora imeti neko dolžino, opazimo, da nam racionalna števila ne zadoščajo povsem. Podobena ugotovitev velja tudi pri obsegu kroga s premerom 1, kjer se zopet izkaže, da le ta ni racionalno število. Vendar pa je dokaz, da π ni racionalno število precej težji.

Aksiomi realnih števil. Podobno kot pri naravnih številih, bomo tudi tu zapisali aksiome (osnovne lastnosti), ki jih pričakujemo od realnih števil. Zaenkrat naj poudarimo, da realnih števil še nismo skonstruirali, tako da strogo gledano še ne vemo, da le ta obstajajo. Konstrukcijo realnih števil bomo nakazali malo kasneje.

(i) Lastnosti seštevanja

A1 Komutativnost: $a + b = b + a$
A2 Asociativnost: $(a + b) + c = a + (b + c)$
A3 Nevtralni element za seštevanje: obstaja število 0, da velja $a + 0 = a$ za vsako število a
A4 Obratni element za seštevanje: za vsako realno število a obstaja število $-a$, da velja $a + (-a) = 0$

(ii) Lastnosti množenja
A5 Komutativnost: $a \cdot b = b \cdot a$
A6 Asociativnost: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
A7 Obstaja enota za množenje: obstaja število 1, da velja $a \cdot 1 = a$ za vsako število a
A8 Inverzni element za množenje: za vsako realno število $a \neq 0$ obstaja število a^{-1}, da velja $a \cdot a^{-1} = 1$

(iii) Lastnosti, ki povezujeta seštevanje in množenje
A9 $0 \neq 1$
A10 Distributivnost: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Opomba. Če v neki množici za seštevanje veljajo aksiomi $A1$ do $A4$ rečemo, da je ta množica *komutativna grupa* za seštevanje. Če veljajo še aksiomi $A5$, $A6$, $A7$, $A9$ in $A10$, rečemo, da je množica za operaciji seštevanje in množenje *komutativni kolobar z enoto*. Taka množica so npr. cela števila. Če veljajo vsi zgornji aksiomi, torej tudi $A8$, pa pravimo, da gre za *komutativni obseg* ali polje. Hitro lahko opazimo, da zgornji aksiomi veljajo npr. za racionalna števila, torej so tudi racionalna števila (ne le realna števila) komutativni obseg.

Naša predstava o realnih številih je več kot samo o predstava o množici, v kateri lahko dobro seštevamo in množimo. Realna števila si predstavljamo linearno urejena.

(iv) Aksiomi urejenosti
A11 Antisimetričnost: če $a \leq b$ in $b \leq a$ je $a = b$
A12 Tranzitivnost: če je $a \leq b$ in $b \leq c$ je $a \leq c$
A13 Stroga sovisnost: za vsaki števili a, b velja $a \leq b$ ali $b \leq a$

(v) Povezava med urejenostjo in operacijama $+, \cdot$
A14 Če je $a \leq b$ je $a + c \leq b + c$ za vsako število c
A15 Če je $a \leq b$ in $0 \leq c$ je $a \cdot c \leq b \cdot c$

Opomba. Če v komutativnem obsegu obstaja relacija urejenost, ki zadošča aksiomom $A11$ do $A15$, rečemo, da je ta komutativni obseg linearno urejen (števila si lahko predstavljamo urejena v vrsto). Z vsemi dosedanjimi aksiomi smo povedali, da želimo, da so realna števila linearno urejen komutativni obseg. Hitro lahko preverimo, da vse te lastnosti veljajo za racionalna števila z običajno urejenostjo $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ če $ad \leq cd$. Zgornji aksiomi torej v ničemer še ne ločijo realnih števil od racionalnih števil.

Definicija. Množica števil A je navzgor omejena, če obstaja tako število a, da je $x \leq a$ za vsak $x \in A$. Vsakemu številu a s tako lastnostjo rečemo *zgornja meja* množice A. Če je a zgornja meja množice A in nobeno število $b < 0$ ni zgornja meja množice A, rečemo, da je a *supremum* ali *natančna zgornja meja* množice A in označimo $a = \sup A$.

Na povsem analogen način povemo, kdaj je neka množica A *navzdol omejena*, definiramo pojem *spodnja meja* in *natančna spodnja meja* ali *infimum* ($\inf A$). Če je množica tako navzgor kot tudi navzdol omejena, rečemo, da je omejena.

Primer. Ilustrirajmo si zgornje pojme na nekaj zgledih.

- Množica $A = (1, \infty)$ je navzdol omejena, ni navzgor omejena. Spodnja meja je vsako število, $a \leq 1$, $\inf A = 1$.
- Množica $A = [1, 3)$ je omejena, $\inf A = 1$, $\sup A = 3$. Ker je $1 \in A$ lahko rečemo, da ima A minimum, ker pa $3 \notin A$, A nima maksimuma.
- Množica $A = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \ldots\}$ je navzgor in navzdol omejena. Natančna spodnja meja je 0, natančna zgornja meja pa 1.

Pomembno vprašanje za nadaljevanje zgodbe o realnih številih je naslednje: Ali ima vsaka navzgor omejena množica tudi natančno zgornjo mejo? Naslednji primer nam pokaže, da znotraj sveta, kjer bi imeli samo racionalna števila, to ne bi držalo.

Primer. Naj bo množica $A = \{x \in \mathbb{Q};\ x^2 \leq 2\}$. Seveda je množica A navzgor omejena, saj je na primer 2 zgornja meja množice A. Lahko pa vidimo, da nobeno racionalno število ni natančna zgornja meja množice A, ker $\sqrt{2}$ ni racionalno število. Množica A je torej navzgor omejena množica racionalnih števil, za katero pa ne moremo najti racionalne natančne zgornje meje.

A16 *Dedekindov aksiom*: vsaka neprazna navzgor omejena množica realnih števil ima natančno zgornjo mejo.

Opomba. Iz Dedekindovega aksioma seveda sledi, da ima tudi vsaka navzdol omejena neprazna množica realnih števil natančno spodnjo mejo.

Naj samo omenimo, da sistem aksiomov $A1 - A16$ natanko določa realna števila, torej vsak linearno urejen obseg, ki zadošča tudi Dedekindovemu aksiomu je izomorfen množici realnih števil. Bolj za ilustracijo si poglejmo nekaj posledic Dedekindovega aksioma.

1.5. Kompleksna števila $\mathbb{C}$

Kompleksna števila definiramo kot pare (a, b) dveh realnih števil, za katera definiramo seštevanje in množenje kot

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \qquad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Bolj običajno se odločimo za ekvivalenten zapis $a+\mathrm{i}b$ kjer definiramo $\mathrm{i}^2 = -1$. S tem dogovorom seštevamo $(a+\mathrm{i}b)+(c+\mathrm{i}d) = (a+c)+\mathrm{i}(b+d)$ in množimo $(a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d) = (ab - bd) + \mathrm{i}(ad + bc)$. Nevtralni element za seštevanje je seveda število $0 = 0+0\mathrm{i}$ in enota za množenje $1 = 1+0\mathrm{i}$. Nasprotni element številu $a + ib$ je $-a - \mathrm{i}b$ in, če $a + \mathrm{i}b \neq 0$ ima število inverzni element za množenje $\frac{1}{a+\mathrm{i}b} = \frac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2}$. Lahko preverimo, da pri tako definiranih operacijah kompleksna števila zadoščajo aksiomom $A1 - A10$, ki smo jih našteli pri realnih številih. Zato so kompleksna števila polje.

Primer. Izračunaj $(2 + 3\mathrm{i}) - (4 - 2\mathrm{i})$, $(1 + 2\mathrm{i})(3 + i)$, $(3 + 2i)^2$ in $\frac{2+i}{3-5\mathrm{i}}$.

Kompleksna števila se v literaturi prvič pojavijo v drugi polovici 16. stoletja. Medtem ko je razlog za uvedbo realnih števil v 'napolnitvi lukenj' v racionalnih številih, pa je razlog za uvedbo kompleksnih števil bolj algebraične narave.

Izrek (Osnovni izrek algebre). *Vsak ne konstanten polinom ima vsaj eno kompleksno ničlo.*

Poglejmo si nekaj definicij. Naj bo $z = a + \mathrm{i}b$ kompleksno število. Število a imenujemo *realni del* kompleksnega števila z in ga označimo z $\mathrm{Re}\ z$. število b pa *imaginarni del* kompleksnega števila z in ga označimo z $\mathrm{Im}\ z$. *Absolutna vrednost* števila $z = a+\mathrm{i}b$ je število $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, in je razdalja števila $z = a + \mathrm{i}b$ do izhodišča kompleksne ravnine. *Konjugirano število* kompleksnemu številu $z = a + \mathrm{i}b$ je število $\bar{z} = a - \mathrm{i}b$ in je zrcalna slika števila z glede na x-os v kompleksni ravnini. Naslednja trditev povsem sledi iz definicij.

Izrek. *Naj bosta z in w kompleksni števili. Velja*

(i) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$,
(ii) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$,
(iii) $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$
(iv) $\mathrm{Re}\ z = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $\mathrm{Im}\ z = \frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$.

Absolutna vrednost ima naslednje lastnosti.

Izrek. *Naj bosta z in w kompleksni števili. Potem velja*

(i) $|z| \geq 0$ *in* $|z| = 0$ *samo če je* $z = 0$,
(ii) $|\bar{z}| = |z|$,
(iii) $|zw| = |z||w|$,
(iv) $|\mathrm{Re}\ z| \leq |z|$ *in* $|\mathrm{Im}\ z| \leq |z|$,
(v) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Dokaz. Točki (i) in (ii) preprosto sledita iz definicij. Oglejmo si (iii) Naj bo $z = a + \mathrm{i}b$ in $w = c + \mathrm{i}d$. Potem je $zw = (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc)$. Torej je

$$\begin{aligned} |zw|^2 &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z|^2|w|^2. \end{aligned}$$

Točka (iv) pomeni $a^2 \leq a^2 + b^2$ in $b^2 \leq a^2 + b^2$, kar je očitno. Ostane nam torej samo se trikotniška neenakost (v):

$$|z + w|^2 = (a + c)^2 + (b + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ac + 2bd,$$

in

$$(|z| + |w|)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}.$$

Neenakost bo torej dokazana, če pokažemo $ac + bd \leq \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}$. Če neenačbo kvadriramo, dobimo neenakost

$$a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd \leq a^2c^2 + b^2d^2 + b^2c^2 + a^2d^2,$$

oziroma $b^2c^2 + a^2d^2 \geq 2abcd$, kar pomeni $(bc - ad)^2 \geq 0$. $\square$

Polarni zapis kompleksnega števila. Kompleksno število $z = a + \mathrm{i}b$ lahko zapišemo tudi s pomočjo kota φ, ki ga daljica med izhodiščem in točko z oklepa s pozitivno x osjo in razdaljo r točke z do izhodišča.

Kot φ običajno vzamemo na intervalu $[0, 2\pi)$ in ga imenujemo *argument* števila z in označimo z $\arg z$. Med običajnimi kartezičnimi koordinatami in polarnimi koordinatami števila z veljajo zveze

$$a = r\cos\varphi, \qquad b = r\sin\varphi$$

in

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \tan\varphi = \frac{b}{a}.$$

Kot polarni zapis števila $z = a + \mathrm{i}b$ razumemo zapis

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi).$$

Primer. Zapišimo naslednja kompleksna števila s polarnim zapisom: -3, $1 + i$, $-1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$. Število -3 ima argument π in je oddaljeno 3 od izhodišča. Zato je $-3 = 3(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)$. Število $1+i$ ima argument $\pi/4$ in $|1+i| = \sqrt{2}$, zato $1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\pi 4)$. Število $-1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$ ima argument $2\pi/3$ in $|-1+\sqrt{3}|| = 2$ in zato $-1 + \sqrt{3}\mathrm{i} = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3})$.

Polarni zapis je zelo primeren za množenje. Naj bo $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ in $w = \rho(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta)$. Potem je

$$\begin{aligned} zw &= r\rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta) \\ &= r\rho(\cos\varphi\cos\vartheta - \sin\varphi\sin\vartheta + (\cos\varphi\sin\vartheta + \sin\varphi\cos\vartheta)) \\ &= r\rho(\cos(\varphi + \vartheta) + \mathrm{i}\sin(\varphi + \vartheta)). \end{aligned}$$

Zgornji račun nam pove, da je $|zw| = |z||w|$ in tudi $\arg zw = \arg z + \arg w$. Formulo lahko uporabimo tudi pri potencah števil. Če je $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, je

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi).$$

V posebnem primeri, če je $|z| = 1$ dobimo *de Moiverovo formulo*:

$$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi.$$

Primer. Poglejmo si, kaj nam gornja formula npr. pove v primeru $n = 3$.

$$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + \mathrm{i}\sin 3\varphi,$$

po drugi strani pa je

$$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3\mathrm{i}\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - \mathrm{i}\sin^3\varphi.$$

Zato velja

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi, \qquad \sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi.$$

Primer. Izračunajmo $(1 + \mathrm{i})^{100}$. V polarnem zapisu je $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4})$. Zato $(1 + \mathrm{i})^{100} = (\sqrt{2})^{100}(\cos\frac{100\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{100\pi}{4}) = 2^{50}(\cos 25\pi + \mathrm{i}\sin 25\pi)) = 2^{50}(-1 + 0\mathrm{i}) = -2^{50}$.

Poglejmo si še, kako lahko s pomočjo polarnega zapisa rešujemo enačbo $z^n = w$, kjer je

$$w = \rho(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta)$$

dano kompleksno število. Rešitev z prav tako iščimo v polarnem zapisu $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$. Veljati mora

$$r^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi) = \rho(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta).$$

Zato je $r = \sqrt[n]{\rho}$ in $n\varphi = \vartheta + 2k\pi$, oziroma $\varphi = \frac{\vartheta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$. Pri tem je dovolj, da za parameter k vzamemo števila $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Torej je

$$z = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\vartheta + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

Primer. Poiščimo vse kompleksne rešitve enačbe $z^3 = -1$. V polarnem zapisu je $-1 = (\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)$. Zato so rešitve enačbe

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \\ z_2 &= \cos\frac{3\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{3} = -1 \\ z_3 &= \cos\frac{5\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \end{aligned}$$

POGLAVJE 2

Matrike

2.1. Osnovne definicije

Matrike so pravokotne tabele realnih ali kompleksnih števil. Na primer

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Če ima matrika n *vrstic* in m *stolpcev*, rečemo, da je to $n \times m$ matrika. Splošna $n \times m$ matrika A je torej oblike

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Element matrike, ki se nahaja v i-ti vrstici in v j-tem stolpcu, bomo označili z a_{ij}. Če je $n = m$, rečemo, da je matrika *kvadratna*. Kvadratne matrike imajo diagonalo, ki je sestavljajo elementi oblike a_{ii}.

2.2. Vsota matrik in množenje matrik s skalarjem

Naj bosta A in B $n \times m$ matriki

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}.$$

Vsota matrik A in B je matrika

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2m} + a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{bmatrix}.$$

Če je $\alpha \in \mathbb{R}$ (ali $\alpha \in \mathbb{C}$) poljuben *skalar*, definiramo množenje matrike A z α kot

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1m} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & \cdots & \alpha a_{nm} \end{bmatrix}.$$

PRIMER. Naj bosta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Potem je

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Če matriko A pomnožimo z 2 dobimo

$$2A = 2\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 4 & 0 & 8 \\ -6 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Naj bodo A, B, C poljubne $n \times m$ matrike in $\alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ poljubna skalarja. Za seštevanje in množenje matrik s skalarjem veljajo naslednje lastnosti

(i) Lastnosti seštevanja
- Komutativnost: $A + B = B + A$
- Asociativnost: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Nevtralni element za seštevanje: Če je $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, velja $A + 0 = 0 + A = A$.
- Obratni element za seštevanje: velja $-A + A = A + (-A) = 0$, kjer je $-A = (-1) \cdot A$.

(ii) Lastnosti množenja s skalarjem
- Distributivnost seštevanja matrik in množenja s skalarjem: $\alpha(A + B = \alpha A + \alpha B$.
- Distributivnost seštevanja skalarjev in množenja matrik s skalarjem: $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta B$.
- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.
- Množenje matrike s skalarjem 1: $1A = A$.

2.3. Množenje matrik

Določene matrike lahko med seboj tudi množimo. Množenje matrike A z matriko B je definirano, če ima matrika B toliko vrstic, kolikor ima A stolpcev. Naj bo torej A $n \times k$ matrika in B $k \times m$ matrika. Potem je $A \cdot B$

$n \times m$ matrika

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{km} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{k} a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{k} a_{1i}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{k} a_{1i}b_{im} \\ \sum_{i=1}^{k} a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{k} a_{2i}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{k} a_{2i}b_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{k} a_{ni}b_{i1} & \sum_{i=1}^{k} a_{ni}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{k} a_{ni}b_{im} \end{bmatrix}.$$

Primer. Naredimo nekaj primerov

(i)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -3 \\ 1 & 8 & -9 \\ -6 & 8 & -10 \end{bmatrix}$$

(ii)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -3 \\ 1 & 8 & -9 \end{bmatrix}$$

(iii)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

(iv)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} = 4$$

(v)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Označimo z I_n kvadratno $n \times n$ matriko

$$I_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriki I_n rečemo *identična matrika* reda n. Včasih izpuščamo podpis n, če je red očiten.

Navedimo lastnosti množenja matrik.

- Asociativnost: $(AB)C = A(BC)$, če je A $n \times k$ matrika, B $k \times m$ matrika in C $m \times l$ matrika.
- Leva in desna enota za množenje: $I_n A = A I_m = A$, če je A $n \times m$ matrika.
- Desna distributivnost: $(A+B)C = AC + BC$, če sta A in B $n \times k$ matriki, in C $k \times m$ matrika.
- Leva distributivnost: $C(A+B) = CA + CB$, če sta A in B $k \times m$ matriki, in C $n \times k$ matrika.
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$, če je A $n \times k$ matrika, in B $k \times m$ matrika ter α skalar.

Opomba. Oba produkta AB in BA lahko izračunamo, če je A $n \times m$ matrika, B pa $m \times n$ matrika. V tem primeru je AB $n \times n$ matrika, BA pa $m \times m$ matrika. Če $n \neq m$ produkta nimata enake oblike (števila stolpcev in vrstic). Če je $n = m$ sta obliki obeh produktov sicer enaki, vendar sta oba produkta praviloma različna. Produkt matrik torej ni komutativen.

2.4. Inverz kvadratne matrike

Kvadratna $n \times n$ matrika A ima *inverz* A^{-1}, ki je prav tako $n \times n$ matrika, če velja

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Primer. Vsaka kvadratna matrika nima inverza. Poglejmo si matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

in predpostavimo, da je matrika

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}$$

njen inverz. Potem mora veljati

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2u & y+2v \\ 2x+4u & 2y+4v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ker ne more hkrati veljati

$$x + 2u = 1 \text{ in } 2x + 4u = 2(x+2u) = 0,$$

matrika A nima inverza.

Naj bo sedaj

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Velja

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrika A ima torej inverz

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

POGLAVJE 3

Determinante

3.1. Determinanta 2×2 matrik

Poglejmo si najprej, kako izračunamo inverz splošne 2×2 matrike

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Iščemo torej matriko

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix},$$

da bo

$$AX = \begin{bmatrix} ax + bu & ay + bv \\ cx + du & cy + dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dobimo torej sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} ax + bu &= 1 \quad & ay + bv &= 0 \\ cx + du &= 0 \quad & cy + dv &= 1. \end{aligned}$$

Hitro se lahko prepričamo, da je sistem rešljiv natanko v primeru, ko je

$$ad - bc \neq 0,$$

rešitev pa je

$$\begin{aligned} x &= \frac{d}{ad - bc} \quad & y &= \frac{-b}{ad - bc} \\ u &= \frac{-c}{ad - bc} \quad & v &= \frac{a}{ad - bc}. \end{aligned}$$

Definirajmo determinanto 2×2 matrike

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

kot

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Pokazali smo torej, da je 2×2 matrika A obrnljiva natanko tedaj, ko je $\det A \neq 0$, njen inverz pa je v tem primeru enak

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

3.2. Predznak permutacije

Permutacija števil $1, 2, \cdots, n$ je vsaka preureditev tega zaporedja števil. Vse permutacije števil $1, 2, 3$ so na primer $1, 2, 3,\ 1, 3, 2,\ 2, 1, 3,\ 2, 3, 1,\ 3, 1, 2$ in $3, 2, 1$. Število permutacij n števil je $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$, permutacije pa običajno označujemo z malimi grškimi črkami $\sigma, \pi, \ldots$. Tako na primer pišemo permutacijo $2, 1, 3$ kot

$$\pi(1) = 2, \quad \pi(2) = 1, \quad \pi(3) = 3,$$

ali

$$\pi = (2, 1, 3)$$

ali

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Permutacija torej ni nič drugega kot bijektivna preslikava $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ Dve permutacije lahko komponiramo tako, kot komponiramo preslikave. Če je

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

in

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

potem je

$$\pi \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

saj je

$$\pi(\sigma(1)) = \pi(3) = 3, \quad \pi(\sigma(2)) = \pi(1) = 2, \quad \pi(\sigma(3)) = \pi(2) = 1.$$

Transpozicija je permutacija, pri kateri med seboj zamenjamo samo dva elementa. Permutacija $(2, 1, 3)$ je transpozicija, ker smo zamenjali le elementa 1 in 2, permutacija $(3, 1, 2)$ pa ni transpozicija. Lahko pa permutacijo $(3, 1, 2)$ zapišemo kot kompozitum $\tau_2 \circ \tau_1$ dveh transpozicij $\tau_1 = (2, 1, 3)$ in $\tau_2 = (1, 3, 2)$. Najprej smo torej zamenjali 2 in 1, nato pa še 2 in 3. ni se težko prepričati, da lahko vsako permutacijo zapišemo kot kompozitum več transpozicij. Naj bo torej

$$\sigma = \tau_k \circ \tau_{k-1} \circ \cdots \circ \tau_1$$

zapis permutacije kot kompozitum k transpozicij. Če je k sodo število, rečemo, da je predznak permutacije σ enak 1, če pa je k liho število, pa -1. Torej je

$$\text{sign } \sigma = (-1)^k.$$

Permutacije sicer lahko na različne načine zapišemo kot kompozitum transpozicij, vendar bo zapis vedno imel enako parnost.

3.3. Determinanta splošne kvadratne matrike

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

kvadratna $n \times n$ matrika. Determinanto matrike A definiramo kot vsoto vseh možnih različnih si (primerno predznačenih) produktov n elementov matrike, pri čemer je v vsakem produktu lahko en sam element iz vsake vrstice. Vsak tak produkt je določen s tem, da povemo, kateri element smo vzeli iz prve vrstice, $a_{1\pi(1)}$, kateri element iz druge vrstice $a_{2\pi(2)}$, in tako dalje. Natanko vsaka permutacija π na n številih nam torej da po en primeren produkt

$$a_{1\pi(1)}a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}.$$

V vsoti bomo vsak tak produkt še pomnožili s predznakom permutacije. Definirajmo torej determinanto matrike A kot

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\pi} \operatorname{sign} \pi \prod_{k=1}^{n} a_{k\pi(k)}. \tag{1}$$

Poglejmo si, kako običajno postopamo pri računanju determinant. Naj bosta $1 \leq j, k \leq n$. Označimo z A_{jk} $(n-1) \times (n-1)$ matriko, ki jo dobimo s tem, da iz matrike A izbrišemo j-to vrstico in k-ti stolpec. Če v (1) združimo vse tiste produkte, ki vsebujejo element a_{11}, je njihova vsota ravno $a_{11} \det A_{11}$. Nobeden od teh produktov ne sme vsebovati člena a_{12}, saj je v vsakem produktu le en člen iz vsake vrstice. Členi produkta, ki vsebujejo a_{12} so torej disjunktni s členi produkta, ki vsebujejo a_{11}, njihova vsota pa je enaka $-a_{12} \det A_{12}$. V splošnem se členi produkta, ki vsebujejo člen a_{1j} seštejejo v $(-1)^{j+1} a_{1j} \det A_{1j}$. Zato dobimo formulo

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} A_{1n} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \det A_{1j}, \end{aligned}$$

kar imenujemo razvoj determinante po prvi vrstici. Analogno lahko dobimo razvoj determinante po prvem stolpcu

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \det A_{11} - a_{21} \det A_{21} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n1} A_{n1} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{j1} \det A_{j1}. \end{aligned}$$

Determinanta splošne 3×3 matrike

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

je enaka

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg. \end{aligned}$$

Primer. Izračunajmo determinanto matrike

$$\begin{bmatrix} -2 & 20 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

V tem primeru je smiselno, da determinanto razvijemo po prvem stolpcu, ker le ta vsebuje precej ničel. Tako dobimo

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7.$$

Bolj splošno lahko opazimo, da je determinanta zgornje trikotne (ali spodnje trikotne) matrike vedno kar produkt njenih diagonalnih elementov.

Poglejmo si nekaj pomembnih lastnosti determinante, ki jih lahko uporabimo pri računanju determinante. Dokazov ne bomo navajali.

- Če v matriki zamenjamo med seboj dva stolpca (ali dve vrstici), se determinanta pomnoži z -1.
- Če v matriki enemu stolpcu prištejemo nek drug stolpec, se determinanta ne spremeni. Enako z vrsticami.
- Če nek stolpec (ali vrstico) pomnožimo s številom α, se tudi determinanta pomnoži s tem številom.
- Če celo matriko pomnožimo s številom α, se determinanta pomnoži s številom α^n.

Medtem ko ne obstaja enostavna formula za determinanto vsote dveh matrik, pa je determinanta produkta enaka produktu determinant. Torej, če sta A in B $n \times n$ matriki, velja

$$\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B).$$

Če za matriko A obstaja inverz A^{-1}, je torej

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Podobno, kot smo to pokazali za 2×2 matrike, pa v splošnem velja naslednji izrek.

Izrek. *Matrika A ima inverz natanko tedaj, ko je* $\det A \neq 0$.

Če ima matrika neničelno determinanto, rečemo, da je nedegenerirana.

3.4. Transponiranje matrike

Naj bo A splošna $n \times m$ matrika

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Matriko A^T, ki jo dobimo tako, da so vrstice matrike A^T ravno stolpci matrike A, imenujemo transponirana matrika matrike A. Bolj natančno, A^T je $m \times n$ matrika

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Naslednje lastnosti so vse, razen morda tretje, dokaj očitne.

- $(A + B)^T = A^T + B^T$, če sta A in B poljubne $n \times m$ matriki.
- $(A^T)^T = A$, če je A poljubna $n \times m$ matrika.
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, če je A poljubna $n \times m$ matrika, B pa poljubna $m \times k$ matrika.
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$, če je A poljubna nedegenerirana $n \times n$ matrika.
- $\det A^T = \det A$.

POGLAVJE 4

Evklidski prostor $\mathbb{R}^n$

4.1. Vektorski prostor $\mathbb{R}^n$

Prostor $\mathbb{R}^n$ sestavljajo urejene n-terice realnih števil $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$,ki pa jih bomo pogosto pisali v *vektorski obliki* kot stolpec

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Dva vektorja $\vec{x}$ in $\vec{y}$ lahko med seboj seštevamo

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

definirano pa imamo tudi množenje vektorja z realnim skalarjem

$$\alpha\vec{x} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}.$$

S tako definiranima operacijama postane $\mathbb{R}^n$ vektorski prostor, z ničelnim elementom

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

kar pomeni, da veljajo aksiomi

- $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$,
- $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$,
- $\vec{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \vec{x} = \vec{x}$,
- $\vec{x} + (-\vec{x}) = (-\vec{x}) + \vec{x} = \mathbf{0}$,
- $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$,
- $1\vec{x} = \vec{x}$,
- $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$,
- $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$.

Ker vsak vektor

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

lahko na en sam način zapišemo kot *n linearno kombinacijo* standardnih *baznih vektorjev*

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \ \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

kar pomeni,

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n,$$

rečemo, da je $\mathbb{R}^n$ *n dimenzionalen vektorski prostor.*

4.2. Skalarni produkt

Prostor $\mathbb{R}^n$ lahko opremimo s *standardnim skalarnim produktom*

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^T \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 \cdots x_ny_n,$$

in inducirano *standardno normo*

$$||x|| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Ta norma nam nadalje na $\mathbb{R}^n$ inducira *standardno metriko*

$$d(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Hitro lahko preverimo, da ima skalarni produkt ima lastnosti

- $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$ če $\vec{x} \neq \mathbf{0}$.
- $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$,
- $\langle \alpha\vec{x}, \vec{y} \rangle = \alpha\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$,
- $\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$.

Posledično za standardno normo na $\mathbb{R}^n$ velja

- $||\vec{x}|| > 0$ če $x \neq \mathbf{0}$,
- $||\alpha\vec{x}|| = |\alpha| \, ||\vec{x}||$,
- $||\vec{x} + \vec{y}|| \leq ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||$,
- $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq ||\vec{x}|| \, ||\vec{y}||$.

4.3. Matrike kot linearne preslikave

Naj bo A $n \times m$ matrika

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$,

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix},$$

lahko razumemo tudi kot $m \times 1$ matriko. Tako nam že definiran matrični produkt $A\vec{x}$ da $n \times 1$ matriko, ki pa jo zopet razumemo kot vektor iz prostora $\mathbb{R}^n$. Torej lahko vsako $n \times m$ matriko A razumemo kot preslikavo $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m \end{bmatrix}.$$

PRIMER. Matrika

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

nam poda preslikavo $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2x - 1/2y \\ 1/2x + \sqrt{3}/2y \end{bmatrix}.$$

Slike standardnih baznih vektorjev $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ in $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sta ravno stolpca matrike A, torej $A\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ in $A\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$. Geometrijsko nam matrika A predstavlja vrtenje točk za kot $\pi/6$ okrog izhodišča v pozitivni smeri. $\square$

Pri vsaki matriki A so stolpci te matrike ravno slike standardnih baznih vektorjev $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m$ s preslikavo, ki jo ta matrika določa. Nadalje ima taka preslikava lastnosti

- $A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$,
- $A(\alpha\vec{x}) = \alpha A\vec{x}$.

Preslikavam iz $\mathbb{R}^m$ v $\mathbb{R}^n$, ki zadoščajo tema dvema lastnostma rečemo *linearne preslikave*. Matrike $n \times m$ nam torej podajo linearne preslikave iz $\mathbb{R}^m$

v $\mathbb{R}^n$. Obratno za vsako linearno preslikavo $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ velja, da vektor

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

preslika v vektor

$$x_1 A\vec{e}_1 + x_2 A\vec{e}_2 + \cdots + x_n A\vec{e}_m.$$

Vsaka linearna preslikava je torej natanko podana s tem, da vemo, kam se preslikajo vektorji standardne baze. Če torej sestavimo matriko, ki bo za stolpce imela kar slike vektorjev standardne baze, dobimo matriko, ki to preslikavo predstavlja.

Primer. Napišimo matriko, ki predstavlja zrcaljenje točk v $\mathbb{R}^2$ preko premice $y = x$.

Vsako zrcaljenje preko premice, ki poteka skozi izhodišče, je linearna preslikava. Zrcaljenje preko premice $y = x$ nam točko $(1, 0)$ preslika v $(0, 1)$, točko $(0, 1)$ pa v $(1, 0)$. Zato je matrika, ki predstavlja to zrcaljenje enaka

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poljubna točka (x, y) se torej prezrcali v

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$

POGLAVJE 5

Sistem linearnih enačb

5.1. Gaussova metoda

Poglejmo si preprost sistem treh linearni enačb za tri neznanke

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 3y & + & 2z & = & 5 \\ x & + & 2y & - & 2z & = & 3. \\ -3x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

Sistem linearnih enačb se popolnoma nič ne spremeni, če zamenjamo prvo in drugo enačbo

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 2z & = & 3 \\ 2x & - & 3y & + & 2z & = & 5. \\ -3x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

Iz druge in tretje enačbe lahko eliminiramo spremenljivko x, tako da drugi enačbi odštejemo 2-kratnik prve, in tretji prištejemo 3-kratnik prve

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & = & 3 \\ & - & 7y & + & 6z & = & -1. \\ & & 7y & - & 5z & = & 9 \end{array}$$

Če sedaj tretji enačbi prištejemo drugo, dobimo sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & = & 3 \\ & - & 7y & + & 6z & = & -1. \\ & & & & z & = & 8 \end{array}$$

Sedaj že lahko sistem že rešimo $z = 8$, $y = (-1 - 6 \cdot 8)/(-7) = 7$, $x = 3 + 2 \cdot 8 - 2 \cdot 7 = 5$. Lahko pa s postopkom še nadaljujemo. Prvi enačbi lahko prištejemo 2-kratnik tretje, drugi pa odštejemo 6-kratnik tretje

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & & & = & 19 \\ & - & 7y & & & = & -49. \\ & & & & z & = & 8 \end{array}$$

Sedaj drugo enačbo delimo z -7

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & & & = & 19 \\ & & y & & & = & 7 \\ & & & & z & = & 8 \end{array}$$

in na koncu še prvi enačbi odštejemo 2-kratnik druge

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & & & & & = & 5 \\ & & y & & & = & 7. \\ & & & & z & = & 8 \end{array}$$

Operacije, ki smo jih izvajali na sistemu so naslednje.

- Menjava vrstnega reda enačb/vrstic.
- Množenje/deljenje neke enačbe/vrstice z neničelnim številom.
- Prištevanje/odštevanje večkratnika neke enačbe/vrstice drugim enačbam/vrsticam.

Če je sistem rešljiv, nas bo sistematična uporaba teh pravil preprosto pripeljala do rešitve. Kar opazimo je, da pri reševanju sistema uporabljamo le koeficiente sistema, in da nam pravzaprav ni potrebno pisati spremenljivk x, y, z. Tako lahko naš prvotni sistem enako dobro predstavimo s tabelo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Reševanje sistema enačb sedaj, analogno kot zgoraj, poteka tako, da zaporedno izvajamo zgoraj naštete operacije na vrsticah. Postopek reševanja zgoraj tako lahko pišemo kot

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -7 & 6 & -1 \\ 0 & 7 & -5 & 9 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -7 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 19 \\ 0 & -7 & 0 & -49 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right]$$

Idealno želimo, da je prvi del tabele diagonalen, z enkami po diagonali. Lahko pa se zgodi, da je katera od vrstic ničelna (razen končne vrednosti za črto). V tem primeru enačba sistem enačb ni rešljiv, razen v primeru, ko je tudi za črto v tej vrstici število 0.

Takemu sistematičnemu postopku reševanja enačb rečemo *Gaussova eliminacija*, in ga lahko izvajamo na poljubnem linearnem sistemu n enačb z n neznankami.

5.2. Matrična oblika sistema linearnih enačb

Poljuben linearen sistem n enačb z n neznankami

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{12}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n = b_2 \\ & & & \cdots & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

lahko zapišemo v matrični obliki

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

kjer je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \ \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Rešitev sistema je seveda tak vektor $\vec{x}$, ki reši enačbo pri dani matriki A in danem vektorju $\vec{b}$. Če je matrika A obrnljiva in poznamo njen inverz, lahko $\vec{x}$ preprosto dobimo kot

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

TRDITEV. *Če je* $\det A \neq 0$ *ima sistem* $A\vec{x} = \vec{b}$ *eno samo rešitev in sicer* $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

Je pa, kot bomo videli v naslednjem razdelku, inverz matrike enak reševanju n linearnih sistemov z matriko A in je računsko bolj zahtevno, kot reševanje enega samega sistema enačb. Sistem

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

običajno rešujemo z zgoraj opisanim postopkom Gaussove eliminacije, torej z zgoraj opisanimi vrstičnimi operacijami na tabeli

$$\left[A \mid \vec{b}\right].$$

5.3. Gaussova eliminacija in inverz matrike

Če obstaja, poiščimo inverz matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Inverz matrike A je takšna matrika

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33}, \end{bmatrix}$$

da velja

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Iskanje inverza je v tem primeru torej ekvivalentno hkratnemu reševanju treh sistemov enačb

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Skupaj lahko sisteme rešujemo tako, da operacije Gaussove eliminacije sistematično izvajamo na vrsticah tabele

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

dokler ne dobimo pred vertikalno črto identične matrike. Desno od črte je tedaj ravno inverz dane matrike

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 6 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 6 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & -5 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5/7 & 8/7 & 6/7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4/7 & 5/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 & 5/7 & 8/7 & 6/7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Torej je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4/7 & 5/7 & 2/7 \\ 5/7 & 8/7 & 6/7 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

V splošnem inverz $n \times n$ matrike A dobimo tako, da v tabeli

$$\left[A \mid I\right]$$

izvajamo operacije Gaussove eliminacije na vrsticah toliko časa, da pred vertikalno črto dobimo identično matriko I. Za črto se tedaj nahaja ravno A^{-1}. Postopka ne moremo izvesti zgolj v primeru, ko pred črto v eni od vrstic dobimo same ničle. To se zgodi natanko tedaj ko je ena od vrstic linearna kombinacija ostalih, oziroma, ko je determinanta matrike enaka 0.

POGLAVJE 6

Lastne vrednosti in lastni vektorji

Čeprav nas načeloma zanimajo le realne matrike, pa moramo v tem poglavju bomo predpostaviti, da so matrike lahko kompleksne, kar pomeni, da so elementi matrik kompleksna števila. Zakaj tako, bomo videli kmalu.

6.1. Definicija lastnih vrednosti in lastnih vektorjev

DEFINICIJA. Naj bo A (kompleksna) kvadratna $n \times n$ matrika. Neničeln vektor $\vec{v} \in C^n$ je *lastni vektor* matrike A za za *lastno vrednost* $\lambda \in \mathbb{C}$ matrike A, če velja

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

OPOMBA. Če je $\vec{v}$ lastni vektor za lastno vrednost λ, potem je kateri koli večkratnik $\alpha\vec{v}$ tudi lastni vektor za to isto lasno vrednost α. Ko torej iščemo lastne vektorje, izberemo enega izmed teh vektorjev.

PRIMER. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}.$$

Če je

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

lastni vektor za lastno vrednost λ, potem velja

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -10 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x + 2y \\ -10x + 7y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix},$$

oziroma

$$(-2 - \lambda)x + 2y = 0$$
$$-10x + (7 - \lambda)y = 0.$$

Rešujemo torej sistem enačb

$$\begin{bmatrix} -2 - \lambda & 2 \\ -10 & 7 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Če je

$$\det \begin{bmatrix} -2 - \lambda & 2 \\ -10 & 7 - \lambda \end{bmatrix} \neq 0,$$

ima sistem eno samo rešitev, in sicer $x = y = 0$. Ker mora po definiciji lastni vektor biti neničeln, je to možno le, če je

$$\det \begin{bmatrix} -2 - \lambda & 2 \\ -10 & 7 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,$$

kar pomeni, da mora biti ali $\lambda = 3$, ali $\lambda = 2$. Če je $\lambda = 2$ imamo sistem

$$\begin{aligned} -4x + 2y &= 0 \\ -10x + 5y &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev tega sistema je vsak vektor oblike $\begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix}$, torej na primer

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Če je $\lambda = 3$ rešujemo sistem

$$\begin{aligned} -5x + 2y &= 0 \\ -10x + 4y &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev tega sistema je vsak vektor oblike $\begin{bmatrix} x \\ \frac{5}{2}x \end{bmatrix}$, torej na primer

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Matrika A ima torej dve lastni vrednosti, 2 in 3 z lastnima vektorjema $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$. □

PRIMER. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Če je

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

lastni vektor za lastno vrednost λ, potem velja

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix},$$

oziroma

$$\begin{aligned} -\lambda x + y &= 0 \\ -x - \lambda y &= 0. \end{aligned}$$

Podobno, kot v prejšnjem primeru, ima sistem eno neničelno rešitev le v primeru, ko je

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0.$$

Ta enačba nima realnih rešitev, kar pomeni, da nobeno realno število ni lastna vrednost matrike, in matrika zato tudi nima realnih lastnih vektorjev. Lahko pa enačbo rešimo v kompleksnih številih, $\lambda = i$, ali $\lambda = -i$. Če je $\lambda = i$ imamo sistem

$$\begin{aligned} -ix + y &= 0 \\ -x + iy &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev tega sistema je vsak vektor oblike $\begin{bmatrix} x \\ ix \end{bmatrix}$, torej na primer

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}.$$

Če je $\lambda = -i$ rešujemo sistem

$$\begin{aligned} ix + y &= 0 \\ -x - iy &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev tega sistema je vsak vektor oblike $\begin{bmatrix} x \\ -ix \end{bmatrix}$, torej na primer

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

Matrika A ima torej dve (kompleksni) lastni vrednosti, i in $-i$ z lastnima vektorjema $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$. $\square$

Iz zgornjih dveh primerov vidimo, da velja izrek.

IZREK. *Naj bo A $n \times n$ matrika. Kompleksno število λ je lastna vrednost matrike A natanko tedaj, ko je*

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Naj bo torej

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Postopek za iskanje lastnih vrednosti in lastnih vektorjev je torej naslednji:

(i) Poiščemo vse rešitve enačbe

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = 0.$$

(i) Za vsak λ, ki reši zgornjo enačbo, rešimo linearni sistem

$$A\vec{v} = \lambda v.$$

Determinanta

$$\det(A - \lambda I),$$

katere ničle iščemo, je polinom stopnje n v spremenljivki λ, ki mu rečemo *karakteristični polinom* matrike A. Kot vemo, polinomi nimajo nujno realnih ničel, imajo pa vedno n-kompleksnih ničel (šteto z večkratnostjo). Zato pri iskanju lastnih vrednosti nujno naletimo na kompleksna števila.

Primer. Naj bo
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Poiščimo lastne vrednosti in lastne vektorje matrike A.

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0$$

Edina lastna vrednost matrike je $\lambda = 1$, ki je dvojna ničla karakterističnega polinoma matrike A. Lasni vektorji so rešitve sistema
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
Lasni vektor za edno lasno vrednost $\lambda = 1$ je torej vsak vektor oblike $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Kljub temu, da je matrika 2×2, nimamo dveh linearno neodvisnih lastnih vektorjev.

Identična matrika
$$A = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
ima prav tako karakteristični polinom $(1-\lambda)^2$ in samo eno lastno vrednost $\lambda = 1$, vendar pa ima dva linearno neodvisna lastna vektorja, saj za vsak vektor $\vec{v}$ velja
$$A\vec{v} = 1\vec{v}.$$
Za lastna vektorja lahko izberemo kar $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ in $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. □

6.2. Diagonalazicija matrike

Naj bo A $n \times n$ matrika in predpostavimo, da smo našli n-linearno neodvisnih lastnih vektorjev
$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ \vdots \\ v_n^1 \end{bmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \\ \vdots \\ v_n^2 \end{bmatrix}, \cdots, \vec{v}_n = \begin{bmatrix} v_1^n \\ v_2^n \\ \vdots \\ v_n^n \end{bmatrix},$$
za lastne vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Opomba. Kot smo videli v prejšnjem razdelku, imamo vedno n-rešitev karakteristične enačbe, ki pa niso nujno vse med seboj različne, in so lahko kompleksna števila, tudi če je matrika sama realna. Če ima kakšna lastna vrednost večkratnost $k > 1$, morda ne moremo najti k linearno neodvisnih lastnih vektorjev za to lastno vrednost. Predpostavilo smo torej, da so bodisi vse rešitve karakterističnega polinoma med seboj si različne (in imamo zato zagotovo zadosti lastnih vektorjev), ali pa, da so si kakšne rešitve karakteristične enačbe med seboj sicer enake, vendar imamo vedno toliko linearno neodvisnih lastnih vektorjev, kolikor je večkratnost lastne vrednosti.

Ker so lastni vektorji linearno neodvisni, ima matrika

$$S = \begin{bmatrix} v_1^1 & v_1^2 & \cdots & v_1^n \\ v_2^1 & v_2^2 & \cdots & v_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n^1 & v_n^2 & \cdots & v_n^n \end{bmatrix},$$

determinanto različno od 0 in zato obstaja inverz S^{-1}. Naj bo

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Da so $\vec{v}_k$ lastni vektorji za lastno vrednost λ_k omeni natanko, da velja matrična enakost

$$AS = SD$$

oziroma

$$A = S^{-1}DS.$$

Ker je matrika D diagonalna, rečemo, da smo matriko A *diagonalizirali* s *prehodno matriko* S.

PRIMER. Poglejmo si Fibonaccijevo zaporedje

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots,$$

ke je podano z $a_0 = a_1 = 1$ in $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$. V matrični obliki lahko to rekurzivno relacijo napišemo v obliki

$$\begin{bmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Zato velja

$$\begin{bmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}.$$

Potenco

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$$

lahko enostavno izračunamo, če uspemo matriko

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

diagonalizirati. Izračunajmo torej lastne vrednosti

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

kar nam da

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ in } \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Lastni vektor za λ_1 je rešitev enačbe

$$\begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

kar nam da

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Podobno je lastni vektor za λ_2 enak

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zato je

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Če potencirmo levo in desno stran, dobimo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

oziroma

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

kjer smo že izračunali inverz prehodne matrike. Zato velja

$$\begin{bmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

oziroma

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

□