

Arjana Žitnik

Rešene naloge iz kolokvijev in izpitov pri predmetu

DISKRETNA MATEMATIKA 1

Študijsko gradivo za študente 1. letnika Finančne matematike

Ljubljana, 2016

NASLOV: Rešene naloge iz kolokvijev in izpitov pri predmetu
DISKRETNA MATEMATIKA 1
PODNASLOV: Študijsko gradivo za študente 1. letnika Finančne matematike
AVTOR: Arjana Žitnik
IZDAJA: 1. izdaja
ZALOŽNIK: samozaložba
KRAJ: Ljubljana
LETO IZIDA: 2016
AVTORSKE PRAVICE: Arjana Žitnik
CENA: publikacija je brezplačna
NATIS: elektronsko gradivo, dostopno na naslovu:
http://www.fmf.uni-lj.si/~zitnik/DM_FIN_izpiti.pdf

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

519.17(0.034.2)

ŽITNIK, Arjana

Rešene naloge iz kolokvijev in izpitov pri predmetu Diskretna matematika I [Elektronski vir] : študijsko gradivo za študente 1. letnika Finančne matematike / Arjana Žitnik. - 1. izd. - El. knjiga. - Ljubljana : samozal., 2016

Način dostopa (URL): http://www.fmf.uni-lj.si/~zitnik/DM_FIN_izpiti.pdf

ISBN 978-961-283-618-4 (pdf)

284496384

Predgovor

Zbirko nalog, ki jo imate pred sabo, sestavljajo rešeni kolokviji in izpiti, ki so jih pisali študenti prvega letnika študijske smeri Finančna matematika na UL FMF v študijskih letih 2008/2009 do 2013/2014, ko sem na tej smeri vodila vaje pri predmetu Diskretna matematika 1.

Študenti matematike imajo že nekaj časa na voljo odlično zbirko nalog *Teorija grafov in kombinatorika* avtorjev Martina Juvana in Primoža Potočnika (DMFA založništvo, Ljubljana, 2000). Študenti finančne matematike imajo predmet Diskretna matematika 1 že v prvem letniku študija, zato se je izkazalo, da bi jim pri študiju prišla prav še kakšna zbirka lažjih nalog. Upam, da jim bo pričujoča zbirka v pomoč pri pripravi na kolokvije in izpite.

Arjana Žitnik

Ljubljana, marec 2016

Kazalo

I	Besedila nalog	7
II	Rešitve	39

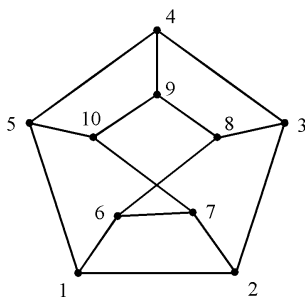
Del I

Besedila nalog

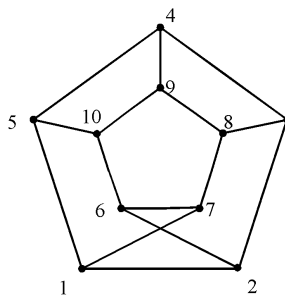
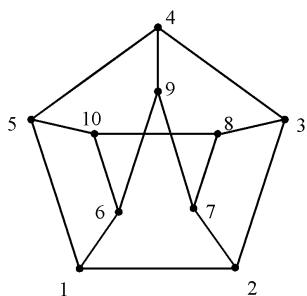
1. kolokvij iz DISKRETNE MATEMATIKE 1

19. november 2008

1. Ali je graf na sliki regularen, dvodelen, Eulerjev, Hamiltonov, ravninski? Koliko najmanj potez potrebujemo, da ga narišemo? (2+5+3+6+10+4 točk)



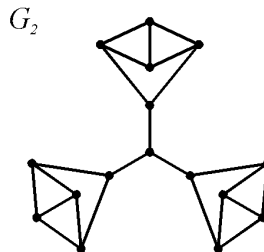
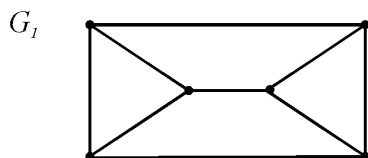
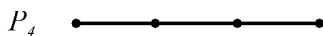
2. Ali je kateri od spodnjih grafov izomorfen grafu iz 1. naloge? V primeru, da je izomorfen, izomorfizem tudi zapišite. (10+10 točk)



3. Graf P_4 je pot na 4 točkah. Pri P_4 -risanju grafa so vse poteze poti P_4 . Natančneje: vsaka povezava grafa pripada natanko eni potezi - poti P_4 . (10+15 točk)

a) Ali obstaja P_4 -risba grafa G_1 ?

b) Ali obstaja P_4 -risba grafa G_2 ?



4. Za enostavne neusmerjene grafe pokažite ali ovržite: (25 točk)

a) Vsak dvodelen Eulerjev graf ima sodo število povezav.

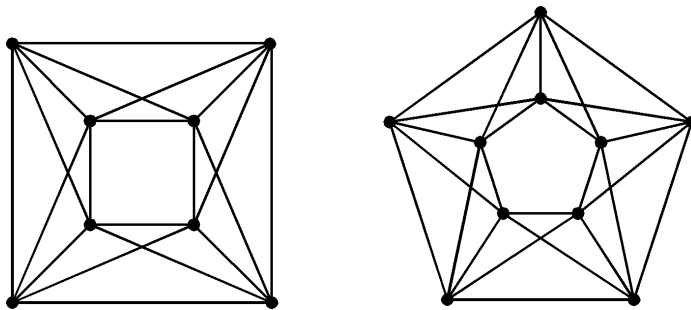
b) Vsak Eulerjev graf s sodo točkami ima sodo število povezav.

2. kolokvij iz DISKRETNE MATEMATIKE 1

14. januar 2009

1. Za spodnja grafa določite njuni barvnosti.

(10+15 točk)



2. Andrej in Bojan imata 6 bankovcev po 50 denot in 4 bankovce po 100 denot. Na koliko načinov si jih lahko razdelita tako, da

- (a) vsak dobi vsaj en bankovec?
- (b) vsak dobi enako število bankovcev?
- (c) vsak dobi enak znesek?

3. Domina je sestavljena iz dveh delov, na vsakem delu je lahko nekaj pik (od 1 do n), ali pa je prazen. V kompletu domin so vse možne različne domine.

- (a) Koliko domin je v kompletu domin?
- (b) Na koliko načinov lahko iz kompleta domin izberemo dve domini, da se bosta na enem delu ujemali?

Na obe vprašanji najprej odgovorite za splošen n in nato še izračunajte za $n = 6$.
(10+15 točk)

4. Poiščite vse rešitve rekurzivne enačbe

$$a_{n+3} - 3a_{n+1} - 2a_n = 0,$$

ki zadoščajo začetnim pogojem $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ in $a_2 = 5$.

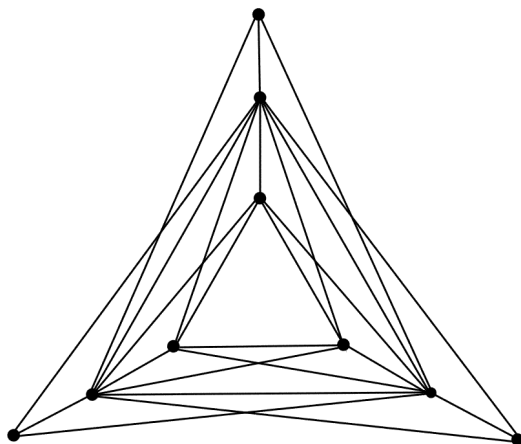
(25 točk)

1. izpit iz DISKRETNE MATEMATIKE 1

9. februar 2009

1. Za graf na spodnji sliki določite njegove lastnosti. (5 + 7 + 6 + 7 + 5 = 30 točk)

- (a) Ali je Eulerjev? Koliko najmanj potez potrebujemo, da ga narišemo?
- (b) Ali je Hamiltonov?
- (c) Ali je ravninski?
- (d) Določite njegovo barvnost.
- (e) Ali je sebi komplementaren?



2. Naj bo $G = (V, E)$ enostaven graf na 20 točkah. Naj za poljubni točki $u, v \in V$ velja $d(u) + d(v) \geq 19$. Pokažite, da je graf G povezan. (20 točk)

3. Na koliko načinov lahko ploskve igralne kocke pobarvamo z rdečo, modro in zeleno barvo, če

- (a) ni nujno, da uporabimo vse tri barve? (10 točk)
- (b) uporabimo vse tri barve? (15 točk)

Opomba: celo ploskev pobarvamo z isto barvo in vedno pobarvamo vseh 6 ploskev.

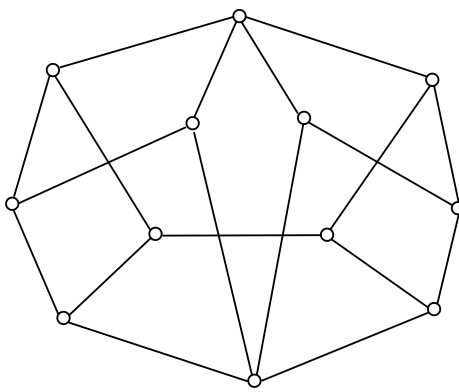
4. Koliko je nenegativnih celih števil, manjših od 10^6 , pri katerih so (desetiške) številke od leve proti desni urejene nepadajoče? (25 točk)

2. izpit iz DISKRETNE MATEMATIKE 1

18. februar 2009

1. Za graf na spodnji sliki določite njegove lastnosti. (5 + 6 + 6 + 8 = 25 točk)

- (a) Ali je Eulerjev? Koliko najmanj potez potrebujemo, da ga narišemo?
- (b) Ali je Hamiltonov?
- (c) Ali je ravninski?
- (d) Določite njegovo barvnost.



2. Poiščite vsa samokomplementarna drevesa. (20 točk)

3. Na koliko načinov lahko (5 + 10 + 5 + 5 + 10 = 35 točk)

- (a) število n zapišemo kot vsoto treh nenegativnih celih števil, če je vrstni red sumandov pomemben?
- (b) število n zapišemo kot vsoto treh nenegativnih celih števil, če vrstni red sumandov ni pomemben?
- (c) število 7^n zapišemo kot produkt treh faktorjev, če je vrstni red faktorjev pomemben?
- (d) število 7^n zapišemo kot produkt treh faktorjev, če vrstni red faktorjev ni pomemben?

Vse naloge najprej rešite za splošen n in potem izračunajte še za $n = 15$.

4. Poiščite vse rešitve rekurzivne enačbe

$$2a_{n+3} = a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n,$$

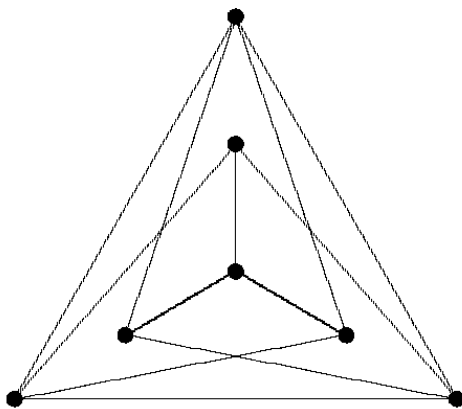
ki zadoščajo začetnim pogojem $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ in $a_2 = 2$. (20 točk)

3. izpit iz DISKRETNE MATEMATIKE 1

14. september 2009

1. Za graf na spodnji sliki določite njegove lastnosti. (7 + 8 + 10 = 25 točk)

- (a) Ali je Hamiltonov?
- (b) Ali je ravninski?
- (c) Določite njegovo barvnost.



2. Naj bo $G = (V, E)$ povezan ravninski graf na 15 točkah, v katerem imajo vse točke stopnjo 5 ali 6. Koliko točk ima stopnjo 5 in koliko točk ima stopnjo 6? Če je možnih več rešitev, poiščite vse rešitve. (25 točk)
3. Koliko je dvojiških zaporedij dolžine 8, ki imajo sodo število enic (torej 0,2,4,6,8)? (20 točk)
4. Na koliko načinov lahko zložimo na kupček n žetonov rdeče, bele in modre barve, če nikoli ne položimo dveh rdečih žetonov zaporedoma? (30 točk)

1. kolokvij iz DISKRETNE MATEMATIKE 1

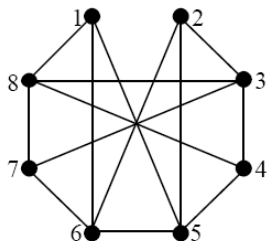
18. november 2009

1. Koliko je zaporedij dolžine 20 iz ničel in enic, če (10+10+10 točk)
 - (a) se zaporedje začne z 10 in konča z 01?
 - (b) se zaporedje začne z 10 in se ne konča z 01?
 - (c) se zaporedje začne z 10 ali se konča z 01?
2. Na koliko načinov lahko iz standardnega paketa 52 kart izvlečemo 6 kart, da bodo 3 karte ene barve in 3 karte druge barve? (20 točk)
3. Na koliko načinov lahko zapišemo (12+13 točk)
 - (a) število 2310 kot produkt dveh faktorjev, večjih od 1 (vrstni red faktorjev ni pomemben)?
 - (b) število $p = p_1 p_2 \cdots p_n$ kot produkt dveh faktorjev, večjih od 1 (vrstni red faktorjev ni pomemben), če so $p_1, p_2, \dots, p_n$ sama različna praštevila?
4. V množici A je 10 dvomestnih števil. Pokažite, da obstajata dve takšni disjunktni podmnožici množice A , da je vsota števil iz ene podmnožice enaka vsoti števil iz druge podmnožice.
Namig: koliko največ lahko dobimo, če seštejemo 10 dvomestnih števil? (25 točk)

2. kolokvij iz DISKRETNE MATEMATIKE 1

13. januar 2010

1. (20 točk) Ali obstaja dvodelen graf G , za katerega velja $\delta(G) + \Delta(G) > |V(G)|$?
2. ($2 + 5 + 3 + 8 + 8 + 4 = 30$ točk) Ali je graf na sliki regularen, dvodelen, Eulerjev, Hamiltonov, ravninski? Koliko najmanj potez potrebujemo, da ga narišemo?



3. (25 točk) Študenti organizirajo tekmovanje v igranju igrice *štiri v vrsti*. Na tekmovanje se je prijavilo 10 kandidatov. V predtekmovanju naj bi se vsak kandidat pomeril s štirimi drugimi.
 - (a) Ali je takšno predtekmovanje mogoče izvesti?
 - (b) Ali lahko to storimo tako, da ni nobene trojice, v kateri bi igral vsak igralec z vsakim?

Opišite, kako bi problem predstavili z grafi in ga rešite na ta način.

4. (25 točk) Poiščite vse rešitve rekurzivne enačbe

$$a_{n+3} - 7a_{n+2} + 15a_{n+1} - 9a_n = 0,$$

ki zadoščajo začetnim pogojem $a_0 = 0$, $a_1 = 4$ in $a_2 = 28$.

1. izpit iz DISKRETNE MATEMATIKE 1

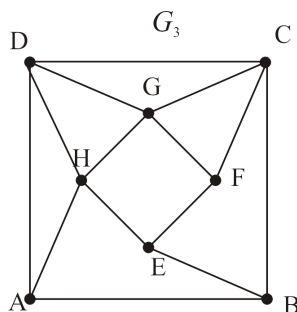
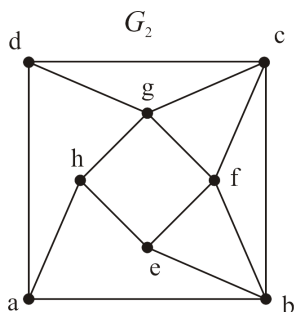
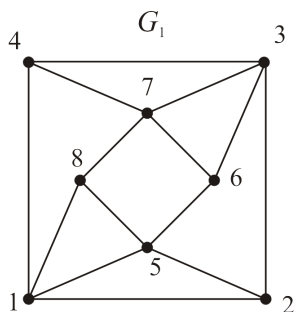
9. februar 2010

1. Izmed števil $-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4$ izberemo štiri števila (vrstni red ni pomemben). Na koliko načinov lahko to storimo, če vrstni red števil ni pomemben in

- (a) so vsa števila so različna po absolutni vrednosti?
- (b) vsako število izberemo največ trikrat?
- (c) so vsa števila različna, njihov produkt pa je negativen?

2. Na koliko načinov lahko v ravnini pridemo od točke $(1, 2)$ do točke $(5, 9)$, če se na vsakem koraku lahko premaknemo ali za 1 v desno ali za 1 navzgor? Kaj pa, če iskana pot ne vsebuje podpoti $(2, 2) - (3, 2) - (4, 2) - (4, 3)$?

3. Kateri izmed grafov na spodnji sliki so izomorfni? Če sta dva grafa izomorfna, zapišite izomorfizem in utemeljite, da je to res izomorfizem. Če nista izomorfna, utemeljite, zakaj ne.

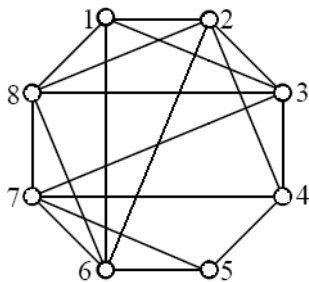


4. Koliko najmanj točk ima enostaven povezan ravninski graf, če ga v ravnini lahko narišemo tako, da ima 53 lic, vsako od lic pa ima na robu najmanj 5 povezav?

2. izpit iz DISKRETNE MATEMATIKE 1

17. februar 2010

- (7 + 7 + 7 + 4 = 25 točk) Iz kompleta 52 kart izberemo 13 kart (vrstni red ni pomemben). Na koliko načinov lahko to storimo, če
 - nobeni dve karti nimata iste vrednosti?
 - ne izberemo nobenega asa?
 - izberemo natanko 10 kart iste barve?
 - izberemo vsaj 10 kart iste barve?
- (25 točk) Koliko različnih besed dolžine 9 lahko sestavimo iz črk besede SLOVENIJA, če
 - ni nobenih omejitev?
 - nobena dva samoglasnika ne smeta biti sosednja?
Opomba: soglasnika sta lahko sosednja!
- (2+3+10+10 = 25 točk) Ali je graf na sliki regularen, Eulerjev, ravninski? Kolikšna je njegova barvnost?



- (25 točk) Poiščite Hamiltonov graf na osmih točkah, ki je izomorfen svojemu komplementu.

3. izpit iz DISKRETNE MATEMATIKE 1

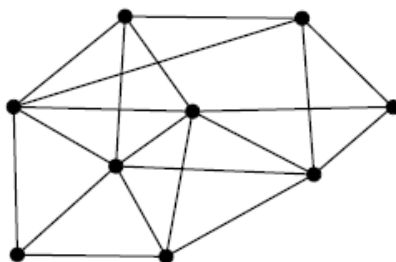
16. september 2010

1. ($7+7+16 = 30$ točk) Koliko besed lahko sestavimo iz črk besede MATEMATIK, če
- (a) ni nobenih dodatnih omejitev?
 - (b) se oba M-ja pojavita zaporedoma?
 - (c) se dve enaki črki ne smeta pojaviti skupaj?

2. (20 točk) Poiščite splošno rešitev rekurzivne enačbe

$$y_{n+2} + 6y_{n+1} + 9y_n = 2^n + n \quad (n \geq 0).$$

3. ($2+5+3+10+10 = 30$ točk) Ali je graf na sliki regularen, dvodelen, Eulerjev, ravninski? Kolikšna je njegova barvnost?



4. ($6+7+7 = 20$ točk) Naj bo G graf na 6 točkah. Koliko je najmanjše in koliko največje število povezav, ki jih G lahko ima, če
- (a) ni nobenih dodatnih omejitev?
 - (b) je G povezan?
 - (c) G ni povezan?

1. kolokvij iz DISKRETNE MATEMATIKE 1

24. november 2010

1. (10+10 točk) Ob železniški progi je k postaj. Koliko različnih vozovnic je treba pripraviti, da jih bodo imeli na razpolago za vse relacije (v obe smeri)? Kaj pa, če se mora vsak potnik peljati vsaj dve postaji?
2. (10+10+10 točk) Koliko je n -mestnih desetiških števil, ki vsebujejo
 - (a) natanko eno enko?
 - (b) natanko dve enki?
 - (c) vsaj dve enki?
3. (5+20 točk) V zaboju je 5 rdečih, 5 modrih in 10 zelenih žog. Na koliko načinov lahko iz tega kupa izberemo
 - (a) 4 žoge?
 - (b) 12 žog?

Opomba: žog iste barve med sabo ne ločimo.

4. (25 točk) Naj bo n liho število in $\{p_1, p_2, \dots, p_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$. Pokažite, da je

$$(p_1 - 1)(p_2 - 2) \dots (p_n - n)$$

sodo število.

2. kolokvij iz DISKRETNE MATEMATIKE 1

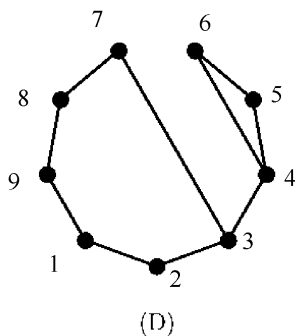
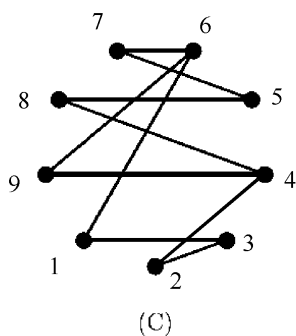
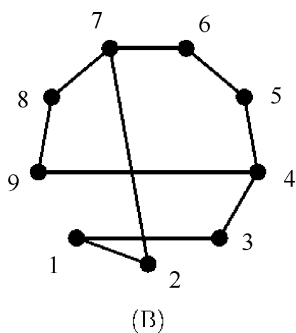
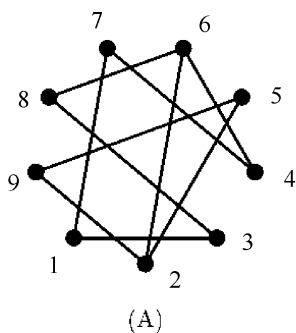
12. januar 2011

1. (25 točk) V skupini 10 ljudi vsak pozna natanko 3 ljudi. Ali se lahko posedejo za okroglo mizo tako, da vsak sedi zraven dveh, ki ju še ne pozna?

Opišite, kako bi problem predstavili z grafi in ga rešite na ta način.

2. (5+10+10 točk) Za vsakega od grafov na spodnji sliki določite njegove lastnosti.

- (a) Ali ima Eulerjev obhod? Koliko najmanj potez potrebujemo, da ga narišemo?
 (b) Ali je Hamiltonov?
 (c) Ali je dvodelen?

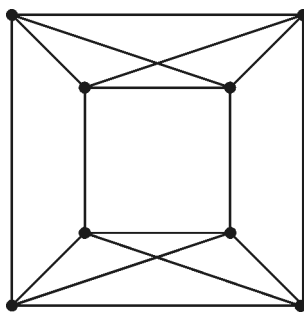


3. (25 točk) Kateri izmed grafov iz prejšnje naloge so izomorfni? Če sta dva grafa izomorfna, zapišite izomorfizem in utemeljite, da je to res izomorfizem. Če nista izomorfna, utemeljite, zakaj ne.
4. (25 točk) Koliko je nizov dolžine n iz znakov $0, 1, 2, 3$, pri katerih se 3 nikoli ne pojavi za 0 ? Primer: niz 331102 je ustrezen, niz 201133 pa ne. Zapišite ustrezno rekurzivno enačbo in jo rešite.

1. izpit iz DISKRETNE MATEMATIKE 1

3. februar 2011

1. (25 točk) Koliko šestmestnih števil ima liho število lihih števk?
2. (25 točk) V kvadratu s stranico 1000 je 4049 okroglih žetonov s premerom 1. Pokažite, da je v kvadratu pravokotnik velikosti 10×20 , ki ima prazen presek z vsakim izmed žetonov.
3. (10+5+10 točk) Ali je graf G na sliki ravninski? Ali je samokomplementaren? Kolikšna je njegova barvnost?

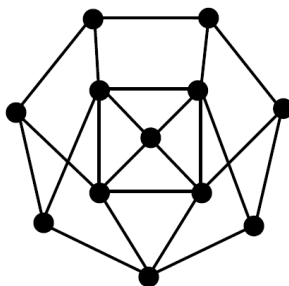


4. (7+6+6+6 točk) Dokazite ali ovržite.
 - (a) Komplement Hamiltonovega grafa je tudi Hamiltonov.
 - (b) Komplement grafa, ki ni Hamiltonov, je Hamiltonov.
 - (c) Komplement Eulerjevega grafa, ki ima sodo število točk, je tudi Eulerjev.
 - (d) Komplement Eulerjevega grafa, ki ima liho število točk, je tudi Eulerjev.

2. izpit iz DISKRETNE MATEMATIKE 1

17. februar 2011

1. Koliko je števil med 1 in 1000000, ki niso niti popolni kvadrati niti popolni kubi?
2. Na koliko načinov lahko izberemo tri števila iz množice $\{1, 2, \dots, 100\}$ tako, da bo njihova vsota deljiva z 2 (vrstni red izbire ni pomemben, večkrat lahko izberemo isto število)?
3. Ali je graf G na sliki ravninski? Ali ima Hamiltonov cikel? Kolikšna je njegova barvnost?



4. Dokazite ali ovržite.
 - (a) Naj bo G enostaven graf na 25 točkah. Če ima G 24 povezav in ni povezan, potem vsebuje cikel.
 - (b) Naj bo G enostaven graf na 25 točkah. Če ima G 23 povezav in ni povezan, potem vsebuje cikel.

3. izpit iz DISKRETNE MATEMATIKE 1

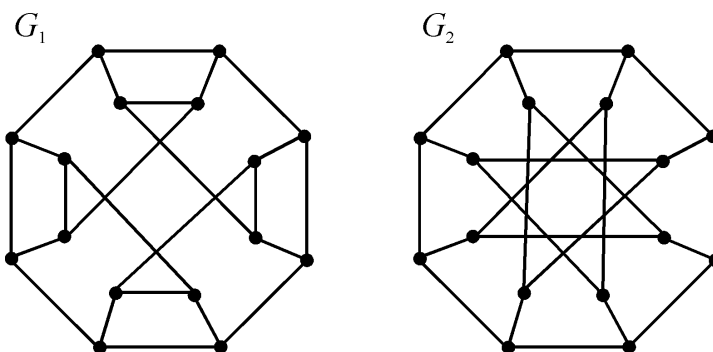
5. september 2011

1. (20 točk) Na obisk je prišlo 5 prijateljev, doma pa imamo 4 različne vrste soka. Na koliko načinov lahko prijateljem natočimo sok, če vsak od prijateljev dobi en kozarec soka in vsake vrste sok uporabimo vsaj enkrat?
2. (30 točk) Koliko različnih zaporedij lahko sestavimo iz črk

$D, I, S, K, R, E, T, N, A, M, A, T, E, M, A, T, I, K, A$

Koliko od teh zaporedij vsebuje besedo *MATEMATIKA*? Koliko jih ne vsebuje niti besede *DISKRETNA* niti besede *MATEMATIKA*?

3. (25 točk) Ali je graf G_1 na sliki ravninski? Ali ima Hamiltonov cikel? Kolikšna je njegova barvnost? Ali je graf G_1 izomorfen grafu G_2 ?



4. (25 točk) Trdnjavo postavimo na šahovnico velikosti 8×8 na levo spodnje vogalno polje. Ali lahko obišče vsako polje šahovnice natanko enkrat in konča v desnem gornjem vogalnem polju? Zapišite kot problem teorije grafov in ga rešite.

Opomba: trdnjavo lahko premikamo le vodoravno in navpično; vsako polje, čez katerega gremo pri premiku, štejemo za obiskano.

1. kolokvij iz DISKRETNE MATEMATIKE 1

23. november 2011

1. (25 točk) Na izpitu je bilo 5 nalog, izpit pa so opravili študenti, ki so pravilno rešili vsaj dve nalogi. Na izpit je prišlo 32 študentov, opravilo pa ga je 18 študentov.
 - (a) Koliko nalog so v najboljšem primeru rešili vsi študenti skupaj?
 - (b) Koliko nalog so v najslabšem primeru rešili vsi študenti skupaj?
 - (c) Pokažite, da je bila vsaj ena od nalog na izpitu takšna, da jo je pravilno rešilo vsaj 8 študentov.
 - (d) Pokažite, da je bila vsaj ena od nalog na izpitu takšna, da jo je pravilno rešilo največ 20 študentov.
2. (20 točk) Na koliko načinov lahko v ravnini pridemo od točke $(0, 0)$ do točke $(8, 10)$, če po poti naredimo natanko tri korake dolžine $\sqrt{2}$ v smeri $(1, 1)$, pri vseh ostalih korakih pa se premaknemo za 1 v smeri $(1, 0)$ ali $(0, 1)$?
3. (30 točk) V predavalnici sta dve vrsti sedežev, v vsaki vrsti je po 8 sedežev. Predavanja obiskuje 14 študentov. Na koliko načinov se lahko posedejo v predavalnico, če Andreja, Bojan, Cvetka, Damjana in Edo vedno sedijo v prvi vrsti, Franci, Gorazd, Hana in Iva pa vedno sedijo v drugi vrsti?
4. (25 točk) Na koliko načinov lahko posedemo 3 (poročene) pare okoli okrogle mize? Kaj pa, če mož in žena nikoli ne sedita skupaj? Drugi del naloge rešite s pomočjo pravila vključitev in izključitev.

Opomba: pri nalogah z okroglo mizo je pomemben le relativen položaj ljudi (koga ima vsak na levi in na desni), ne pa, na katerem sedežu sedi.

2. kolokvij iz DISKRETNE MATEMATIKE 1

30. januar 2012

1. Na koliko načinov lahko pokrijemo šahovnico velikosti $2 \times n$ s ploščicami velikosti 2×1 in 2×2 (ploščice lahko obračamo)? Zapišite in rešite rekurzivno enačbo.

2. Poiščite zaporedje (a_n) , ki ima rodovno funkcijo

$$A(x) = \frac{1}{(x-3)(x-1)} + \frac{x^2}{(x-2)^3}.$$

Koliko je a_8 ?

3. Polni tridelni graf $K_{m,n,p}$, $m, n, p \geq 1$, vsebuje m rdečih, n črnih in p modrih točk. Dve točki grafa $K_{m,n,p}$ sta sosednji natanko tedaj, ko sta različne barve.

(a) Ali $K_{1,2,3}$ vsebuje Hamiltonov cikel? Kaj pa $K_{1,2,4}$?

(b) Ali je graf $K_{1,2,2}$ ravninski? Kaj pa $K_{1,2,3}$?

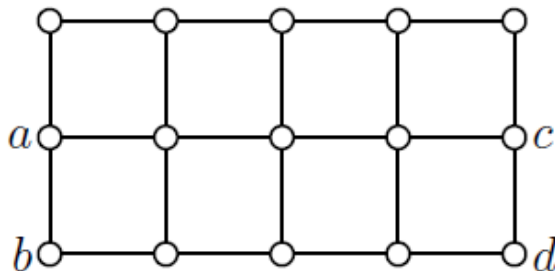
(c) Kolikšna je barvnost grafa $K_{1,2,4}$?

4. Na nekem šahovskem turnirju je sodelovalo šest šahistov. Vsak je odigral bodisi dve, bodisi tri partije. Skupaj so odigrali osem partij. Koliko šahistov je odigralo po dve partiji? Predstavite vprašanje kot problem teorije grafov in ga rešite. Narišite tudi vse neizomorfne grafe, ki predstavljajo rešitev naloge. Jasno utemeljite, zakaj ti grafi niso izomorfni, in da niste na nobenega pozabili.

1. izpit iz DISKRETNE MATEMATIKE 1

2. februar 2012

1. Koliko je različnih permutacij množice $\{1, 2, \dots, 7\}$, ki imajo natanko tri cikle?
2. Na koliko različnih načinov lahko preuredimo črke imena *LAPPEENRANTA* tako, da
 - (a) ne bo dveh zaporednih *P*-jev?
 - (b) ne bo niti dveh zaporednih *P*-jev, niti dveh zaporednih *E*-jev?
 - (c) ne bo dveh (ali treh) zaporednih *A*-jev?
 - (d) ne bosta skupaj dve enaki črki?(Lappeenranta je mesto na Finskem.)
3. Za malico bi si radi kupili sendvič, ki stane n centov. Imamo polno denarnico kovancev po 1 cent in po 2 centa (vsakih več kot n). Na koliko načinov lahko plačamo sendvič
 - (a) v trgovini, kjer izročimo ves denar naenkrat?
 - (b) na avtomatu, kamor vstavljamo kovance zaporedoma? Nasvet: zapišite ustrezno rekurzivno enačbo in jo rešite.
4. Graf G je predstavljen na spodnji sliki.
 - (a) Ali dvodelen? Ali je Hamiltonov?
 - (b) Če grafu G dodamo po eno od povezav ac , ad , bc ali bd , dobimo grafe G_1 , G_2 , G_3 oziroma G_4 . Kateri izmed dobljenih grafov so izomorfni?
 - (c) Ali je kateri izmed grafov G_1 , G_2 , G_3 in G_4 Hamiltonov?



2. izpit iz DISKRETNE MATEMATIKE 1

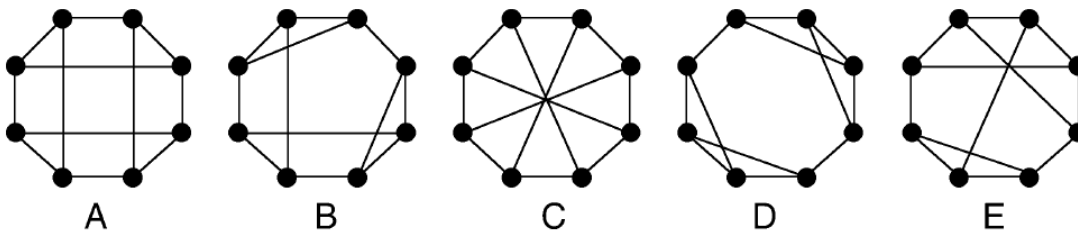
17. februar 2012

1. Na koliko načinov lahko iz množice $\{1, 2, \dots, 100\}$ izberemo tri števila tako, da bo njihova vsota deljiva s 3?
2. Na koliko načinov si lahko Janko, Metka in čarovnica razdelijo pomarančo, hruško, slivo, breskev, marelico in šest jabolok? Kaj pa, če vsak dobi vsaj en sadež?
3. Z uporabo rodovnih funkcij rešite rekurzivno enačbo $a_{n+1} - 2a_n = 2^{n+1}$ za $a_0 = 2$.
4. Imamo 8 domin s pikami $(1 : 6)$, $(2 : 3)$, $(2 : 4)$, $(2 : 5)$, $(2 : 6)$, $(3 : 5)$, $(4 : 5)$ in $(4 : 6)$. Zlagamo eno poleg druge tako, da imata sosednji domini isto število pik na polovici, kjer se dotikata (na primer $(6 : 2)(2 : 3)(3 : 5) \dots$). Ali lahko vseh 8 domin razporedimo v ravno vrsto? Ali jih lahko razporedimo v pravokotnik? Predstavite vprašanji kot problema teorije grafov in ju rešite. Ali je dobljeni graf ravninski?

3. izpit iz DISKRETNE MATEMATIKE 1

5. september 2012

1. Na koliko načinov lahko damo 24 različnih predmetov v 3 različne škatle, če damo v eno od škatel natanko 16 predmetov? Kaj pa, če so škatle enake?
2. Koliko je matrik dimenzije 3×3 iz elementov $0, 1, \dots, 9$, ki nimajo nobene ničelne vrstice in nobenega ničelnega stolpca?
3. Za vsakega od grafov na spodnji sliki poiščite njegovo barvnost. Kateri izmed njih so ravninski? Kateri pari grafov so med seboj izomorfni?



4. Graf G je *hipo-Hamiltonov*, če ni Hamiltonov, vendar je $G - v$ Hamiltonov za vsak $v \in V(G)$.
 - (a) Pokažite, da je Petersenov graf hipo-Hamiltonov.
 - (b) Pokažite, da je $\Delta(G) \leq (n - 1)/2$, če je G hipo-Hamiltonov graf.

1. kolokvij iz DISKRETNE MATEMATIKE 1

5. december 2012

1. V skupini je 10 parov. Na koliko načinov lahko izmed njih izberemo 5 ljudi, če
 - (a) med njimi ni nobenega para?
 - (b) sta med njimi vsaj dva para?
 - (c) sta med njimi točno dva para?
2. Na koliko načinov lahko med 4 otroke razdelimo 6 čokolad, 5 piškotov in 3 bonbone? Kaj pa, če vsak otrok dobi vsaj eno od sladkarij? Vse sladkarije iste vrste so enake.
3. Študenti 1. letnika imajo v predmetniku 8 predmetov, vse ure posameznega predmeta se izvajajo na isti dan (v blokih). Na koliko načinov lahko sestavljalac urnika razdeli predmete po dnevih (ponedeljek, torek, sredo, četrtek, petek) tako,
 - (a) da bodo študenti vsak dan imeli vsaj en predmet?
 - (b) da bodo študenti vsaj en dan prosti?
 - (c) da bodo v petek imeli na urniku manj predmetov kot v torek?

Opomba: določeno je samo, kateri predmeti bodo na posamezen dan, ne pa tudi njihov vrstni red.
4. Naj bo A množica moči 18, njeni elementi pa soda števila med 2 in 500. Pokažite, da ima množica A vsaj dve podmnožici moči 3 z isto vsoto elementov.

2. kolokvij iz DISKRETNE MATEMATIKE 1

24. januar 2013

1. Poiščite koeficient pri x^{15} za

$$f(x) = \frac{x + 2x^2}{(1 - x)^6} \quad \text{in} \quad g(x) = \frac{(1 + 2x)^4}{(1 - x)^6}.$$

2. Naj bo a_n število n -mestnih števil iz števk 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, pri katerih se sode številke ne pojavijo zaporedoma. Izračunajte a_1, a_2 in a_3 . Zapišite rekurzivno enačbo, ki ji ustreza zaporedje (a_n) , in jo rešite.
3. Naj bo a naravno število in M_a množica vseh naravnih števil, ki delijo število a . Definirajmo graf G_a takole: točke grafa G_a so elementi množice M_a , točki x in y pa sta povezani natanko tedaj, kadar obstaja tako praštevilo p , da velja $x = py$ ali $y = px$.
- (a) Čim lepše narišite graf G_{60} .
 - (b) Poiščite njegovo barvnost
 - (c) Ali je G_{60} ravninski graf?
 - (d) Ali G_{60} vsebuje Hamiltonov cikel?
4. Ali obstaja povezan graf na 8 točkah, ki je izomorfen svojemu komplementu in vsebuje natanko dve točki stopnje 6? Če obstaja, koliko povezav in točk ima, kakšne so stopnje točk?

1. izpit iz DISKRETNE MATEMATIKE 1

1. februar 2013

1. (30 točk) Na koliko načinov lahko 9 (različnih) igrač razdelimo med 4 otroke, če
 - (a) najmlajši dobi 3 igrače, ostali pa po dve igrači?
 - (b) vsak dobi vsaj eno igračo?
 - (c) nihče ne dobi več kot 4 igrače?
2. (20 točk) Naj bo n naravno število in $S \subseteq \{1, 2, \dots, 2n\}$ množica moči $n + 1$. Pokažite, da v S obstajata dve števili, katerih vsota je enaka $2n + 1$.
3. (25 točk) Na koliko načinov lahko pokrijemo šahovnico velikosti $2 \times n$ s ploščicami velikosti 2×1 in 2×2 , če so ploščice 2×1 štirih različnih barv, ploščice 2×2 pa petih različnih barv? Zapišite in rešite rekurzivno enačbo. Opomba: ploščice velikosti 2×1 lahko postavljamo na šahovnico počez ali vzdolž šahovnice.
4. (25 točk) Naj bo $1 \leq n \leq m$. Za katere m, n je graf $K_{m,n}$
 - (a) Eulerjev?
 - (b) ravninski?
 - (c) Hamiltonov?

2. izpit iz DISKRETNE MATEMATIKE 1

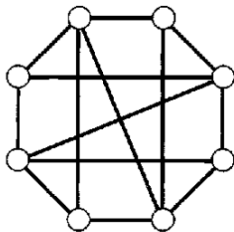
14. februar 2013

1. (20 točk) Študent mora na izpitu rešiti vsaj sedem od desetih nalog. Na koliko načinov lahko to stori, če mora rešiti vsaj štiri izmed prvih šestih nalog?
2. (30 točk) Na koliko načinov lahko zberemo 24 EUR od štirih otrok in šestih odraslih, če
 - (a) naj vsaka oseba da vsaj 1 EUR?
 - (b) naj vsaka oseba da vsaj 1 EUR in Janezek ne da več kot 4 EUR?
 - (c) naj vsaka oseba da vsaj 1 EUR in lahko vsak otrok da največ 4 EUR, vsak odrasel pa največ 7 EUR ?
3. (25 točk) Z uporabo rodovnih funkcij rešite rekurzivno enačbo $a_n - 3a_{n-1} = 5 \cdot 3^{n+1}$ za $a_0 = 2$.
4. (25 točk) Poiščite povezan enostaven graf G na 6 točkah oziroma pokažite, da ne obstaja:
 - (a) G ni dvodelen, $\overline{G}$ ni dvodelen.
 - (b) G je dvodelen, $\overline{G}$ je dvodelen.
 - (c) G je ravninski, $\overline{G}$ je ravninski.
 - (d) G ni ravninski, $\overline{G}$ ni ravninski.
 - (e) $\overline{G}$ je povezan.

3. izpit iz DISKRETNE MATEMATIKE 1

27. avgust 2013

1. Koliko različnih podgrafov, izomorfnih ciklom, ima graf K_6 ?
2. Koliko je nizov dolžine 5 iz črk slovenske abecede, ki vsebujejo vsaj en A , vsaj en O in vsaj en R ?
3. Naj bo a_n število nizov dolžine n , ki jih lahko sestavimo iz nizov 0, 01, 011, 111. Na primer, $a_4 = 9$, ker lahko sestavimo 9 nizov dolžine 4:
0, 0, 0, 0 $\rightarrow$ 0000,
0, 0, 01 $\rightarrow$ 00001,
0, 01, 0 $\rightarrow$ 0010,
01, 0, 0 $\rightarrow$ 0100,
01, 01 $\rightarrow$ 0101,
0, 011 $\rightarrow$ 0011,
011, 0 $\rightarrow$ 0110,
111, 0 $\rightarrow$ 1110,
0, 111 $\rightarrow$ 0111.
Zapišite rekurzivno enačbo za a_n in jo rešite.
4. Določite lastnosti grafa G iz spodnje slike.
 - (a) Ali je ravninski?
 - (b) Kolikšna je njegova barvnost?
 - (c) Ali je izomorfen svojemu komplementu?



1. kolokvij iz DISKRETNE MATEMATIKE 1

27. november 2013

1. (20 točk) Koliko je šestmestnih desetiških števil z vsoto števk enako 51?
2. (30 točk) Na koliko načinov lahko med 3 študente razdelimo 13 različnih knjig, če vsak dobi vsaj eno knjigo? Kaj pa, če vsak dobi vsaj dve knjigi?
Nasvet: uporabite pravilo vključitev in izključitev.

3. (25 točk) Trgovski potnik obišče 4 mesta, vsako natanko 5-krat. Na koliko načinov lahko to stori

- (a) brez dodatnih omejitev?
- (b) če začne in konča v istem mestu?
- (c) če mesti A in B vedno obišče zaporedoma (lahko v različnem vrstnem redu)?

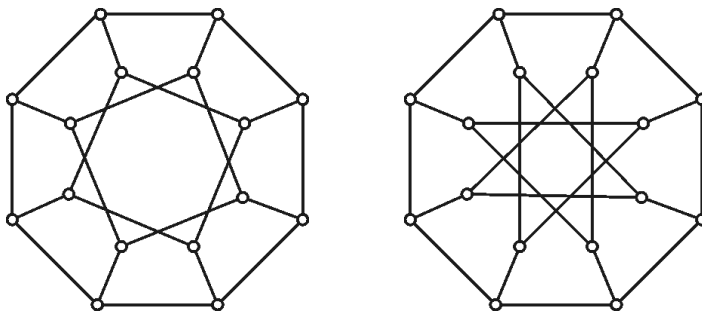
Opomba: potovanje trgovskega potnika opišemo z zaporedjem krajev, ki jih obišče; isti kraj lahko obišče tudi dvakrat zaporedoma.

4. (25 točk) Naj bo n naravno število in $A \subseteq \{1, 2, \dots, 3n\}$ množica moči $n + 1$. Z uporabo Dirichletovega načela pokažite, da v A obstajata dva elementa, ki se razlikujeta najmanj za n in največ za $2n$.

2. kolokvij iz DISKRETNE MATEMATIKE 1

21. januar 2014

- (25 točk) Označimo z a_n število načinov, na katere lahko razdelimo n bonbonov med 5 otrok tako, da vsak otrok dobi vsaj dva bonbona (bonboni so vsi enaki).
 - Poiščite rodovno funkcijo zaporedja (a_n) .
 - Poiščite eksplicitno formulo za a_n , $n \geq 0$.
 - Koliko je a_{30} ?
- (20 točk) Označimo z a_n število načinov, na katere lahko pokrijemo šahovnico velikosti $1 \times n$ s ploščicami velikosti 1×1 , 1×2 in 1×3 , če so ploščice velikosti 1×1 in 1×2 dveh različnih barv, ploščice velikosti 1×3 pa treh različnih barv.
 - Poiščite a_0, a_1, a_2 in a_3 .
 - Zapišite in rešite rekurzivno enačbo za zaporedje (a_n) .
- (30 točk) Ali sta grafa na spodnji sliki izomorfna? Za vsakega od njiju odgovorite še na naslednja vprašanja.
 - Ali je graf Hamiltonov?
 - Ali je ravninski?
 - Poiščite njegovo barvnost.



- (25 točk) Naj bo G povezan graf na 7 vozliščih. Koliko je najmanjše in koliko največje število povezav, ki jih G lahko ima, če
 - je ravninski?
 - ni ravninski?
 - je ravninski in imajo vsa vozlišča stopnjo najmanj tri?

1. izpit iz DISKRETNE MATEMATIKE 1

7. februar 2014

1. (25 točk) Na izbiro imamo 10 vrst razglednic, vsake vrste razglednic je na razpolago neomejeno število. Na koliko načinov lahko pošljemo razglednice petim prijateljem, če
 - (a) želimo poslati vsakemu prijatelju natanko eno razglednico?
 - (b) želimo poslati same različne razglednice, pri čemer dobi vsak prijatelj natanko eno razglednico?
 - (c) želimo, da vsak prijatelj prejme natanko dve različni razglednici (različni prijatelji lahko prejmejo enake razglednice)?
 - (d) želimo poslati vsakemu prijatelju vsaj eno razglednico, vendar nobenemu dveh ali več enakih?
2. (25 točk) Koliko besed lahko sestavimo iz črk A,A,B,B,C,C,C tako, da v nobeni besedi črka A ni hkrati na 1. in 2. mestu, B ni na 3. mestu in C ni hkrati na 4. in 5. mestu?

3. (20 točk) Poiščite zaporedje (a_n) , ki ima rodovno funkcijo

$$A(x) = \frac{x-3}{2x-3} + \frac{x}{(x-2)^3}.$$

Koliko je a_6 ?

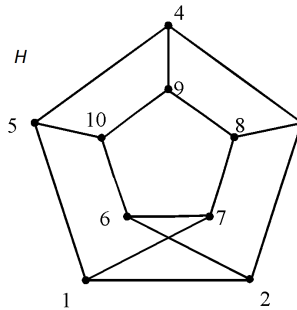
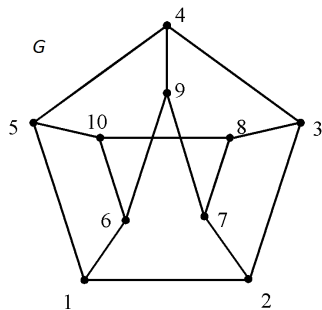
4. (30točk) Čim lepše narišite grafe $\overline{C_3}$, $\overline{C_4}$, $\overline{C_5}$ in $\overline{C_6}$.

- (a) Določite stopnje vozlišč in števila povezav za grafe $\overline{C_n}$, $n \geq 3$.
- (b) Za katere $n \geq 3$ je graf $\overline{C_n}$ Eulerjev?
- (c) Za katere $n \geq 3$ je graf $\overline{C_n}$ dvodelen?
- (d) Za katere $n \geq 3$ je graf $\overline{C_n}$ ravninski?

2. izpit iz DISKRETNE MATEMATIKE 1

14. februar 2014

1. Koliko je permutacij števk $0, 1, \dots, 9$, pri katerih
 - (a) je na prvem mestu liha števka, na zadnjem mestu pa ena od $1, 2, 3, 4, 5$?
 - (b) 0 ni na prvem mestu in 9 ni na zadnjem mestu?
2. Za 10 gostov je na voljo 7 vrst sokov. Na koliko načinov lahko gostom natočimo vsakemu en kozarec soka, če uporabimo natanko štiri vrste sokov?
3. Označimo z a_n število podmnožic množice $\{1, \dots, n\}$, pri katerih se poljubna dva elementa razlikujeta vsaj za 4.
 - (a) Določite $a_1, \dots, a_7$.
 - (b) Poiščite čim enostavnejšo rekurzivno zvezo, ki ji zadoščajo členi zaporedja (a_n) .
 - (c) S pomočjo rekurzivne zveze iz točke (b) poiščite rodovno funkcijo zaporedja (a_n) .
4. Ali sta grafa na spodnji sliki izomorfna? Za vsakega od njiju odgovorite še na naslednja vprašanja.
 - (a) Ali je graf Hamiltonov?
 - (b) Ali je ravninski?
 - (c) Poiščite njegovo barvnost.



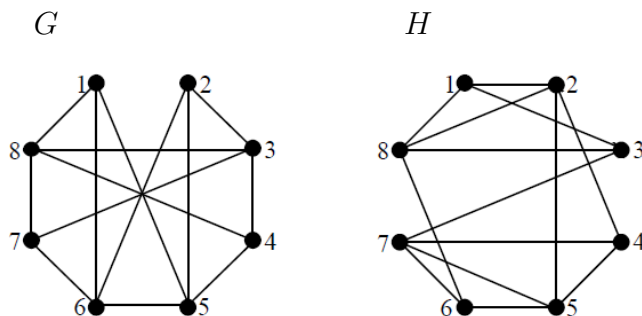
3. izpit iz DISKRETNE MATEMATIKE 1

26. avgust 2014

1. Na koliko načinov lahko postavimo v vrsto 3 rdeče, 4 modre in 5 zelenih kroglic tako, da bodo vse rdeče kroglice pred vsemi modrimi kroglicami, če
 - (a) kroglice razlikujemo med seboj?
 - (b) kroglic iste barve ne razlikujemo?
2. Na koliko načinov lahko iz paketa igralnih kart (52 kart) izberemo osem kart tako, da
 - (a) imamo karte vseh štirih barv?
 - (b) imamo karte natanko treh barv?

Uporabite pravilo vključitev in izključitev.

3. Na koliko načinov lahko razdelimo 32 piškotov med tri študente in tri študentke, če vsak študent dobi vsaj tri piškote in ne več kot deset piškotov, vsaka študentka pa dobi vsaj pet piškotov in ne več kot dvanajst piškotov? Zapišite rodovno funkcijo za razdelitev n piškotov na gornji način in izračunajte ustrezni koeficient.
4. Ali sta grafa na spodnji sliki izomorfna? Za vsakega od njiju odgovorite še na naslednja vprašanja.
 - (a) Ali je graf Hamiltonov?
 - (b) Ali je ravninski?
 - (c) Poiščite njegovo barvnost.



Del II

Rešitve

1. kolokvij, 19. november 2008

1. Poglejmo po vrsti, kakšne lastnosti ima dani graf:

- regularen je, vse točke imajo stopnjo 3;
- dvodelen ni, ker vsebuje cikle lihe dolžine, na primer petkotnik 1, 2, 3, 4, 5, 1;
- Eulerjev ni, ker nimajo vse točke sode stopnje.
- Hamiltonov je, ker ima Hamiltonov cikel, na primer 1, 2, 7, 6, 8, 3, 4, 9, 10, 5, 1;
- ravninski ni, ker vsebuje podgraf, ki je skrčljiv na $K_{3,3}$. Takšen podgraf dobimo na primer tako, da za bele točke vzamemo točke 1, 4 in 10, za črne točke pa točke 2, 5 in 9. Vsako belo točko lahko povežemo s potjo z vsako črno točko tako, da se poti ne sekajo;
- najmanjše število potez, da ga narišemo je $10/2 = 5$, ker ima 10 točk lihe stopnje.

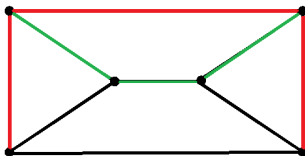
2. Graf iz prve naloge vsebuje tri cikle dolžine 4. To so 1, 2, 7, 6, 1, 3, 4, 9, 8, 3 in 4, 5, 10, 9, 4. Prvi graf iz druge naloge vsebuje samo dva cikla dolžine 4 (1, 6, 10, 5, 1 in 2, 3, 8, 7, 2). Zato ta dva grafa ne moreta biti izomorfna.

Opazimo, da z zamenjavo položajev točk 6 in 7 na sliki drugega grafa iz druge naloge dobimo enako sliko kot za graf iz prve naloge. Torej sta grafa izomorfna. Ustrezni izomorfizem podamo s permutacijo točk:

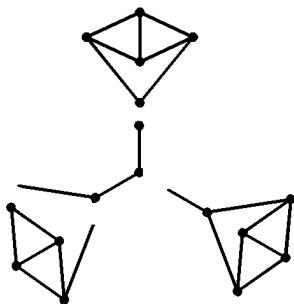
$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 6 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Preveriti je še treba, da se povezave preslikajo v povezave. Glede na to, da se zamenjata samo točki 6 in 7, je dovolj preveriti povezave, ki imajo ti dve točki za krajišča: $\varphi((6 : 1)) = (7 : 1)$, $\varphi((6 : 7)) = (7 : 6)$, $\varphi((6 : 8)) = (7 : 8)$, $\varphi((7 : 2)) = (6 : 2)$ in $\varphi((7 : 10)) = (6 : 10)$. Vse slike povezav so res povezave v drugem grafu iz druge slike in obratno, zato je φ izomorfizem in sta grafa izomorfna.

3. (a) P_4 -risba grafa G_1 obstaja, glej spodnjo sliko.



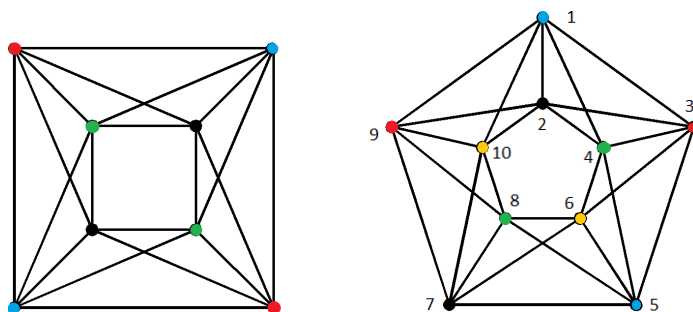
(b) P_4 -risba grafa G_2 ne obstaja. Sklepamo takole. Graf lahko pokrijemo s P_4 -risbami le, če je število njegovih povezav deljivo s 3. To je za graf G_2 sicer izpolnjeno, vendar pa je graf G_2 sestavljen iz treh delov, ki so s po eno povezavo povezane s točko v sredini. Ker je v vsakem delu po 8 povezav, vsakega dela posebej ne moremo pokriti s P_4 -risbami. Ena P_4 -risba bo zato pokrila točko v sredini in eno povezavo iz enega dela ter dve povezavi iz enega od drugih dveh delov. Če te tri povezave odstranimo iz grafa, nam ostanejo tri nepovezane komponente, od katerih ima ena 6 povezav, ena 7 povezav in ena 8 povezav (glej spodnjo sliko). Zadnjih dveh pa ne moremo pokriti s P_4 -risbami, saj števili povezav, ki jih imata, nista deljivi s 3.



4. (a) Trditev velja. Eulerjev graf ima Eulerjev obhod. Vsak obhod v dvodelnem grafu ima sodo število povezav, torej ima tudi Eulerjev obhod sodo število povezav. Ker pa nastopa v Eulerjevem obhodu vsaka povezava grafa natanko enkrat, ima graf sodo število povezav.
- (b) Trditev ne velja. Eulerjev graf s sodo točkami in liho povezavami lahko sestavimo na primer iz cikla dolžine 3 in cikla dolžine 4 tako, da ju zlepimo skupaj v točki. Tako dobimo graf s 6 točkami in 7 povezavami, ki je Eulerjev: ena točka ima stopnjo štiri, pet točk pa ima stopnjo dva.

2. kolokvij, 14. januar 2009

1. Prvi graf ima kliko velikosti 4 (sestavljajo jo na primer gornje 4 točke), zato je njegova barvnost vsaj štiri. Ker lahko graf pobarvamo s štirimi barvami, glej sliko spodaj, je njegova barvnost enaka 4.



Tudi drugi graf ima kliko velikosti vsaj 4, zato potrebujemo vsaj 4 barve. Poskusimo ga pobarvati s štirimi barvami. Začnemo z eno od klik, na primer tisto, ki vsebuje točke 1, 2, 3 in 4. Vsako točko moramo pobarvati z drugo barvo, na primer točko 1 pobarvamo modro, točko 2 črno, točko 3 rdeče in točko 4 zeleno. Ker sta točki 5 in 6 sosednji točkama rdeče in zelene barve, moramo zanju uporabiti modro in črno barvo. Zato moramo za točki 7 in 8 uporabiti rdečo in zeleno barvo. Potem pa moramo točki 9 in 10 pobarvati z modro in črno barvo. Vendar pa imata ti dve točki obe že sosedji modre in črne barve - to sta točki 1 in 2. To pa pomeni, da grafa ne moremo pobarvati s štirimi barvami. Lahko pa ga pobarvamo s petimi barvami, glej gornjo sliko. Barvnost drugega grafa je torej enaka 5.

2. (a) Dovolj je, da preštejemo, na koliko načinov lahko dobi bankovce Andrej, saj Bojan dobi tiste, ki ostanejo. Bankovce za 50 EUR lahko dobi na 7 načinov ($0, 1, \dots, 6$ bankovcev), bankovce za 100 EUR pa lahko dobi na 5 načinov ($0, 1, \dots, 4$ bankovcev), skupaj torej $7 \cdot 5$ načinov. Odšteti je treba še število tistih razdelitev, pri katerih eden od njiju ne dobi nobenega bankovca; takšni razdelitvi sta dve (Andrej ne dobi nič, Bojan ne dobi nič). Torej si lahko razdelita bankovce na 33 načinov.
- (b) Nalogo rešimo z naštetjem vseh možnosti. Najprej naštejemo vse možnosti za Andreja, preostale bankovce dobi Bojan. Bankovce si lahko razdelita na 5 načinov.

Andrej	Bojan
5×50	$1 \times 50 + 4 \times 100$
$4 \times 50 + 1 \times 100$	$2 \times 50 + 3 \times 100$
$3 \times 50 + 2 \times 100$	$3 \times 50 + 2 \times 100$
$2 \times 50 + 3 \times 100$	$4 \times 50 + 1 \times 100$
$1 \times 50 + 4 \times 100$	5×50

(c) Nalogo rešimo z naštetjem vseh možnosti. Vsak dobi 350 EUR, torej mora dobiti liho število bankovcev za 50 EUR. Ker je na voljo samo 6 bankovcev po 50 EUR, dobi vsak najmanj enega in največ 5 bankovcev po 50 EUR.

Najprej naštejemo vse možnosti za Andreja, preostale bankovce dobi Bojan. Bankovce si lahko razdelita na 3 načine.

Andrej	Bojan
$1 \times 50 + 3 \times 100$	$5 \times 50 + 1 \times 100$
$3 \times 50 + 2 \times 100$	$3 \times 50 + 2 \times 100$
$5 \times 50 + 1 \times 100$	$1 \times 50 + 3 \times 100$

3. (a) Za število pik na enem delu domine imamo $n + 1$ možnosti: $0, 1, \dots, n$. Domin z različnima številoma pik na vsakem delu je $\binom{n+1}{2}$, imamo pa še $n + 1$ domin z enakim številom pik na vsakem delu, skupaj torej $\binom{n+1}{2} + (n + 1)$ domin.

Za primer $n = 6$ imamo torej $7\binom{7}{2} + 7 = 21 + 7 = 28$ različnih domin.

(b) Število pik, pri katerem se bosta domini ujemali, lahko izberemo na $n + 1$ načinov. Izmed domin, ki vsebujejo to številko, izberemo dve. Domin, ki vsebujejo dano številko pa je $n + 1$. Torej je iskano število izborov enako $(n + 1)\binom{n+1}{2}$.

Za primer $n = 6$ imamo torej $7\binom{7}{2} = 147$ možnosti.

4. Karakteristični polinom enačbe je $K(x) = x^3 - 3x + 2 = (x + 1)^2(x - 2)$. Ničli sta -1 (2. stopnje) in 2 (1. stopnje). Zato je splošna rešitev enačbe enaka

$$a_n = (A + B \cdot n)(-1)^n + C \cdot 2^n.$$

Konstante A, B in C izračunamo iz začetnih pogojev:

$$\begin{aligned} a_0 &= (A + B \cdot 0)(-1)^0 + C \cdot 2^0 = A + C = 0, \\ a_1 &= (A + B \cdot 1)(-1)^1 + C \cdot 2^1 = -A - B + 2C = 1, \\ a_2 &= (A + B \cdot 2)(-1)^2 + C \cdot 2^2 = A + 2B + 4C = 5. \end{aligned}$$

Rešimo sistem treh enačb s tremi neznankami in dobimo $A = -\frac{7}{9}$, $B = \frac{4}{3}$ in $C = \frac{7}{9}$.
Rešitev gornje rekurzivne enačbe je torej

$$a_n = \left(-\frac{7}{9} + \frac{4}{3}n\right)(-1)^n + \frac{7}{9}2^n.$$

1. izpit, 9. februar 2009

1. Poglejmo po vrsti, kakšne lastnosti ima dani graf:

- Eulerjev ni, ker nimajo vse točke sode stopnje;
- najmanjše število potez, da ga narišemo: ker ima 6 točk lihe stopnje, potrebujemo $6/2 = 3$ poteze;
- Hamiltonov ni: če odstranimo srednji trikotnik (3 točke), graf razpade na 4 komponente (najmanjši trikotnik in tri točke na zunanem trikotniku) in zato ne more imeti Hamiltonovega cikla;
- ravninski ni, ker vsebuje K_5 kot podgraf, na primer podgraf induciran s točkami iz najmanjšega trikotnika skupaj z dvema točkama iz srednjega trikotnika;
- sebi komplementaren ni: pogledamo stopnje točk, ki pa se ne ujemajo. Stopnje točk v grafu so 8,8,8,5,5,5,3,3,3, stopnje točk v komplementu pa 0,0,0,3,3,3,5,5,5.
- Barvnost grafa je enaka 6. Potrebujemo najmanj 6 barv, ker graf vsebuje kliko velikosti 6 (če pogledamo 6 točk v sredini, opazimo, da so vse povezane med seboj). Graf lahko pobarvamo s 6 barvami (6 točk v sredini pobarvamo vsako s svojo barvo, vsaka točka na zunanem trikotniku pa imaj samo tri sosede in jo lahko pobarvamo z eno od preostalih treh barv). Barvnost grafa je torej enaka 6.

2. Naj bo $G = (V, E)$ enostaven graf na 20 točkah in naj za poljubni točki $u, v \in V$ velja $d(u) + d(v) \geq 19$. Recimo, da G ni povezan. Potem množica točk grafa razpade na dva dela V_1 in V_2 tako, da nobena povezava ne povezuje točke iz V_1 s točko iz V_2 . Naj bo $n_1 = |V_1|$ in $n_2 = |V_2|$. Potem velja $1 \leq n_1 \leq 19$, $1 \leq n_2 \leq 19$ in $n_1 + n_2 = 20$. Največja možna stopnja točke iz V_1 je $n_1 - 1$, največja možna stopnja točke iz V_2 pa je $n_2 - 1$. Vzemimo $v_1 \in V_1$ in $v_2 \in V_2$. Potem je $d(v_1) + d(v_2) \leq n_1 - 1 + n_2 - 1 = 20 - 2 = 18$, protislovje. Predpostavka, da graf G ni povezan, nas je pripeljala v protislovje. Torej mora biti graf G povezan.

3. (a) Vsako izmed 6 ploskev lahko pobarvamo na 3 načine, skupaj imamo $3^6 = 729$ načinov.

(b) Nalogo lahko rešimo z uporabo porazdelitev. Elementi so ploskve (6), ki jih ločimo med sabo, saj so oštevilčene. Celice so barve (3), ločimo jih med sabo, celice ne smejo biti prazne. Po formuli je takšnih porazdelitev $3! S(6, 3) = 540$.

Nalogo lahko rešimo tudi tako, da od števila vseh možnosti odštejemo število tistih, pri katerih nismo uporabili vseh barv. Z uporabo pravila vključitev in izključitev dobimo $3^6 - 3 \cdot 2^6 + 3 = 729 - 3 \cdot 64 + 3 = 540$ načinov.

4. Pri tej nalogi štejemo števila n oblike

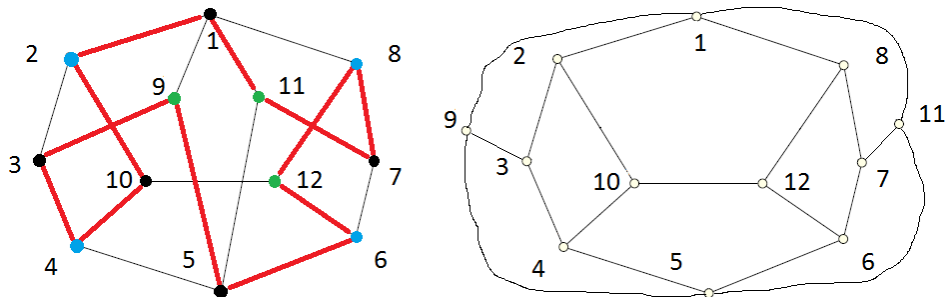
$$n = 10^5 \cdot a_5 + 10^4 \cdot a_4 + 10^3 \cdot a_3 + 10^2 \cdot a_2 + 10 \cdot a_1 + a_0,$$

kjer je $0 \leq a_5 \leq a_4 \leq a_3 \leq a_2 \leq a_1 \leq a_0$. Iz množice $\{0, 1, \dots, 9\}$ izberemo šest števk s ponavljanjem, število pa je s tem že enolično določeno, saj velja $0 \leq a_5 \leq a_4 \leq a_3 \leq a_2 \leq a_1 \leq a_0$. Ustrezni števil je torej $\binom{10+6-1}{6} = \binom{15}{6} = 5005$.

2. izpit, 18. februar 2009

1. Poglejmo po vrsti, kakšne lastnosti ima dani graf:

- Eulerjev ni, ker nimajo vse točke sode stopnje;
- najmanjše število potez, da ga narišemo: ker ima 10 točk lihe stopnje, potrebujemo $10/2 = 5$ potez;
- Hamiltonov je, ker ima Hamiltonov cikel, na primer 1, 2, 10, 4, 3, 9, 5, 6, 12, 8, 7, 11, 1, glej tudi spodnjo sliko levo, kjer so povezave iz Hamiltonovega cikla pobarvane rdeče;
- ravninski je, ker ga lahko v ravnino narišemo tako, da se povezave ne sekajo, glej spodnjo sliko desno, kjer smo prestavili samo točki 9 in 11.
- Barvnost grafa je enaka 3. Potrebujemo najmanj 3 barve, ker graf vsebuje cikel lihe dolžine, na primer 1, 2, 10, 12, 8, 1. Graf lahko pobarvamo s 3 barvami, glej spodnjo sliko levo. Barvnost grafa je torej enaka 3.



2. Drevo z n točkami ima $n - 1$ povezav. Po drugi strani ima samokomplementaren graf z n točkami polovico vseh možnih povezav, to je $\frac{1}{2} \binom{n}{2}$. Število točk samokomplementarnega drevesa mora toraj zadoščati enačbi

$$n - 1 = \frac{1}{2} \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$$

oziroma

$$(n-4)(n-1) = 0.$$

Samokomplementarno drevo ima torej lahko 1 točko (torej je graf z eno točko in nič povezavami, ki je samokomplementaren) ali pa ima 4 točke. Ker ima vsako drevo

vsaj dva lista, bosta imeli dve točki stopnjo 1, drugi dve točki pa morata imeti stopnjo 2 (da bosta imeli stopnjo 1 v komplementu). Edino takšno drevo je pot na 4 točkah. Tudi njegov komplement je pot na 4 točkah. Torej imamo tudi eno samokomplementarno drevo na 4 točkah.

3. (a) Naloga je enakovredna naslednji: na koliko načinov lahko n enakih kroglic razdelimo v tri različne škatle, pri čemer so škatle lahko prazne (kroglice so enote, vsaka škatla pa je en sumand). To lahko naredimo na

$$\binom{n+3-1}{3-1} = \binom{n+2}{2}$$

načinov. Za $n = 15$ je to enako

$$\binom{17}{2} = \frac{17 \cdot 16}{2} = 136.$$

- (b) Če vrstni red sumandov ni pomemben, lahko število n zapišemo kot vsoto treh nenegativnih celih števil na $p(n, 1) + p(n, 2) + p(n, 3)$ načinov, ker sta lahko en ali dva sumanda enaka nič. Za $n = 15$ je to enako $p(15, 1) + p(15, 2) + p(15, 3) = 1 + 7 + 19 = 27$ načinov. Števila $p(n, k)$ izračunamo s pomočjo rekurzivne zveze $p(n, k) = p(n-k, k) + p(n-1, k-1)$ in dejstva, da je $p(n, 1) = 1$ in $p(n, k) = 0$ za $k > n$.

- (c) Za $n = n_1 + n_2 + n_3$ je $7^n = 7^{n_1} \cdot 7^{n_2} \cdot 7^{n_3}$, torej je rešitev enaka kot v točki (a).

- (d) Rešitev je enaka kot v točki (b).

4. Karakteristični polinom enačbe $K(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = (x-1)(x+1)(2x-1)$ ima ničle 1, -1 in $1/2$. Zato je splošna rešitev homogene enačbe enaka

$$a_n = A \cdot 1^n + B \cdot (-1)^n + C \cdot (1/2)^n.$$

Konstante A, B in C izračunamo iz začetnih pogojev:

$$\begin{aligned} a_0 &= A \cdot 1^0 + B \cdot (-1)^0 + C \cdot (1/2)^0 = A + B + C = 0, \\ a_1 &= A \cdot 1^1 + B \cdot (-1)^1 + C \cdot (1/2)^1 = A - B + C/2 = 1, \\ a_2 &= A \cdot 1^2 + B \cdot (-1)^2 + C \cdot (1/2)^2 = A + B + C/4 = 2. \end{aligned}$$

Rešimo sistem treh enačb s tremi neznankami in dobimo $A = 5/2$, $B = 1/6$ in $C = -3/8$. Rešitev gornje rekurzivne enačbe je torej enaka

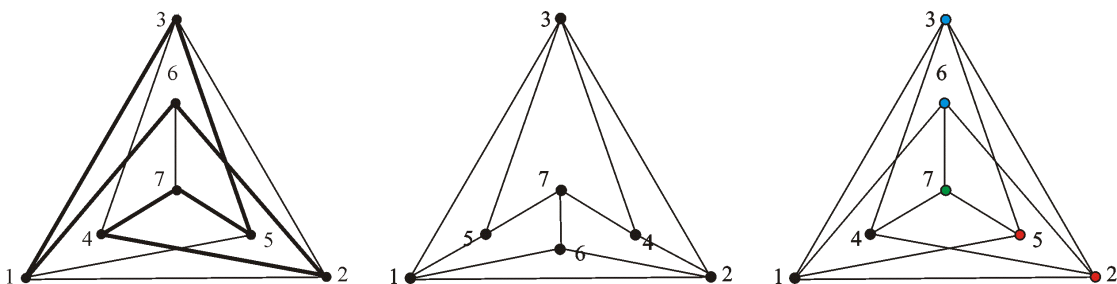
$$a_n = 5/2 + 1/6 \cdot (-1)^n - (3/8) \cdot (1/2)^n.$$

3. izpit, 14. september 2009

1. Graf ima Hamiltonov cikel, na primer 1, 3, 5, 4, 2, 6, 1, glej tudi spodnjo sliko levo, kjer so povezave iz Hamiltonovega cikla narisane z debelejšo črto.

Graf je ravninski, saj ga lahko narišemo v ravnino tako, da se povezave ne sekajo, glej spodnjo sliko v sredini. Ravninsko sliko smo dobili tako, da smo v prvotni sliki le zamenjali položaja točk 4 in 5 ter premaknili točko 6.

Ker graf vsebuje cikle lihe dolžine, je njegova barvnost vsaj tri. Poskusimo sedaj graf pobarvati s tremi barvami. Za zunanji lihi cikel potrebujemo tri barve; točke 1, 2 in 3 moramo pobarvati s tremi različnimi barvami, na primer črno, rdečo in modro. Točka 4 ima sedaj soseda rdeče in modre barve, zato jo moramo pobarvati s črno barvo. Točka 5 ima soseda črne in modre barve, zato jo moramo pobarvati s rdečo barvo. Točka 6 ima soseda črne in rdeče barve, zato jo moramo pobarvati z modro barvo. Sedaj pa ima točka 7 sosede treh različnih barv in moramo zanj uporabiti četrto barvo. Potrebujemo torej vsaj štiri barve. Ker pa nam je uspelo graf pobarvati s štirimi barvami, je njegova barvnost enaka štiri.



2. Označimo z m število povezav, z n_5 število točk stopnje 5 in z n_6 število točk stopnje 6 v grafu G . Potem velja $n_5 + n_6 = 15$. Ker je graf G ravninski, je $m \leq 3 \cdot 15 - 6 = 39$. Po lemi o rokovanju vemo še, da je $2m = 5n_5 + 6n_6$. Torej je $5n_5 + 6n_6 \leq 78$. Vsak ravninski graf ima vsaj eno točko stopnje največ 5. Torej je $n_5 \geq 1$. Preverimo zdaj vse možnosti za n_5 in n_6 :

n_5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
n_6	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$5n_5 + 6n_6$	89	88	87	86	85	84	83	82	81	80	79	78	77	76	75

Ker mora biti $5n_5 + 6n_6$ sodo število, imamo le dve možnosti: $n_5 = 12$, $n_6 = 3$ in $n_5 = 14$, $n_6 = 1$.

3. Dvojiških zaporedij dolžine 8, ki imajo i enic, je $\binom{8}{i}$, saj lahko na toliko načinov izberemo mesta, komor postavimo enice. Dvojiških zaporedij dolžine 8, ki imajo sodo število enic (torej 0,2,4,6,8), je potem

$$\binom{8}{0} + \binom{8}{2} + \binom{8}{4} + \binom{8}{6} + \binom{8}{8} = 1 + 28 + 70 + 28 + 1 = 128.$$

4. Označimo z a_n število načinov, na katere lahko zložimo na kupček n žetonov rdeče, bele in modre barve, če nikoli ne položimo dveh rdečih žetonov zaporedoma. Potem je $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$ za $n \geq 3$. Sklepamo takole. Ustrezni kupčkov višine n , ki se končajo z belim žetonom, je a_{n-1} . Enako velja za modre žetone. Če pa se kupček

višine n konča z rdečim žetonom, mora biti pod njim moder ali bel žeton. Takšnih zaporedij je torej $2a_{n-2}$. Izračunamo še $a_1 = 3$ in $a_2 = 8$ ter rešimo rekurzivno enačbo.

Karakteristični polinom enačbe $K(x) = x^2 - 2x - 2$ ima ničli $1 + \sqrt{3}$ in $1 - \sqrt{3}$. Zato je splošna rešitev homogene enačbe enaka

$$a_n = A \cdot (1 + \sqrt{3})^n + B \cdot (1 - \sqrt{3})^n.$$

Konstanti A in B izračunamo iz začetnih pogojev:

$$\begin{aligned} a_1 &= A \cdot (1 + \sqrt{3})^1 + B \cdot ((1 - \sqrt{3}))^1 = 3, \\ a_2 &= A \cdot (1 + \sqrt{3})^2 + B \cdot (1 - \sqrt{3})^2 = 8. \end{aligned}$$

Dobimo $A = (3 + 2\sqrt{3})/6$ in $B = (3 - 2\sqrt{3})/6$. Rešitev gornje rekurzivne enačbe je torej enaka

$$a_n = (3 + 2\sqrt{3})/6 \cdot (1 + \sqrt{3})^n + (3 - 2\sqrt{3})/6 \cdot (1 - \sqrt{3})^n.$$

1. kolokvij, 18. november 2009

- Od 20 mest so 4 mesta določena. Na preostalih 16 mest lahko damo 0 ali 1. Po pravilu produkta dobimo 2^{16} ustreznih zaporedij.
 - Prvi dve mesti sta določeni, za zadnji dve mesti imamo 3 možnosti: 00, 10 in 11. Na preostalih 16 mest lahko damo 0 ali 1. Po pravilu produkta dobimo $3 \cdot 2^{16}$ ustreznih zaporedij.
Nalogo lahko rešimo tudi z naslednjim razmislekom. Imamo 2^{18} zaporedij dolžine 20, ki se začnejo z 10. Od tega moramo odšteti število zaporedij, ki se končajo z 01. Torej je $2^{18} - 2^{16} = 3 \cdot 2^{16}$ ustreznih zaporedij.
 - Zaporedij dolžine 20, ki se začnejo z 10, je 2^{18} , zaporedij, ki se končajo z 01 je 2^{18} . Zaporedja ki se začnejo z 10 in končajo z 01, smo šteli dvakrat. Ustreznih zaporedij je torej $2 \cdot 2^{18} - 2^{16}$.
- Izmed 4 barv lahko izberemo 2 barvi na $\binom{4}{2}$ načinov, 3 karte izmed 13 kart enake barve pa izberemo na $\binom{13}{3}$ načinov. Po pravilu produkta lahko torej izvlečemo 6 kart (3 ene barve, 3 druge barve) na $\binom{4}{2} \binom{13}{3} \binom{13}{3}$ načinov.
- $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$, torej je produkt petih različnih praštevil. Dva faktorja lahko sestavimo na dva načina: prvi faktor je praštevilo, drugi produkt 4 praštevil ali prvi faktor je produkt dveh praštevil, drugi faktor je produkt 3 praštevil. Skupaj j torej $\binom{5}{1} + \binom{5}{2} = 15$ načinov.
Lahko seštevamo tudi takole: $\frac{\binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4}}{2} = 15$ načinov. Ker vrstni red faktorjev ni pomemben, smo delili z dva.

Lahko sklepamo tudi takole: 2310 ima $2^5 = 32$ deliteljev. Vsak par deliteljev $2310 = a \cdot b$ nam da en razcep na dva faktorja. Odšteti moramo še neustrezen razcep $2310 = 1 \cdot 2310$. Skupaj imamo torej $\frac{2^5}{2} - 1 = 15$ načinov.

Lahko sklepamo tudi takole: imamo dva faktorja - celici, ki sta neoznačeni in ne smeta biti prazni. Različna praštevila so elementi, ki jih razlikujemo. Torej je $S(5, 2) = 15$ različnih načinov.

- (b) Vse razmisleke iz točke (a) lahko enostavno posplošimo iz 5 na n praštevil. Previdni moramo biti le pri prvem razmisleku, če je n sodo število. V tem primeru imamo

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{(n-2)/2} + \binom{n}{n/2} \cdot \frac{1}{2}$$

načinov, saj vsako možnost pri zadnjem sumandu štejemo dvakrat.

4. Največja možna vsota desetih različnih dvomestnih števil je $90 + 91 + \cdots + 99 = 945$; več kot toliko različnih vsot torej ne moremo narediti iz največ desetih dvomestnih števil.

Vseh različnih nepraznih podmnožic množice z 10 elementi je $2^{10} - 1 = 1023$.

Ker je podmnožic več kot možnih vsot, morata po Dirichletovem principu vsaj dve imeti enako vsoto (celice: vsote, elementi: neprazne podmnožice množice A ; elementov je več kot celic).

Dobljeni množici nista nujno disjunktni. V tem primeru odstranimo skupne elemente. Ker sta bili množici različni, sta novi množici neprazni in disjunktni, še vedno pa imata isto vsoto.

2. kolokvij, 13. januar 2010

1. Naj bo G dvodelen graf. Potem lahko množico njegovih točk razbijemo na dve podmnožici V_1 in V_2 na tak način, da ima vsaka povezava eno krajišče v V_1 in drugo v V_2 .

Točke iz V_1 imajo lahko stopnjo največ $|V_2|$, točke iz V_2 pa največ $|V_1|$. Velja torej

$$\delta(G) \leq \min\{|V_1|, |V_2|\} \quad \text{in} \quad \Delta(G) \leq \max\{|V_1|, |V_2|\}.$$

Torej

$$\delta(G) + \Delta(G) \leq |V_1| + |V_2| = |V(G)|.$$

Za dvodelen graf G torej vedno velja $\delta(G) + \Delta(G) \leq |V(G)|$. Zato ne obstaja dvodelen graf G za katerega velja $\delta(G) + \Delta(G) > |V(G)|$.

2. Poglejmo po vrsti, kakšne lastnosti ima graf G :

- regularen ni, ker nimaje vse točke iste stopnje (npr. točka 1 ima stopnjo 3, točka 8 ima stopnjo 4);

- dvodelen ni, ker vsebuje cikle lihe dolžine, na primer trikotnik 1, 5, 6, 1;
 - Eulerjev ni, ker nimajo vse točke sode stopnje;
 - Hamiltonov je, ker ima Hamiltonov cikel, na primer 1, 8, 7, 6, 2, 3, 4, 5, 1;
 - ravninski je, ker ga lahko narišemo v ravnino, ne da bi se povezave sekale. Za dokaz je potem treba graf res tako narisati. Na primer, če pustimo točke 1, 8, 7, 6 na svojih mestih in zasukamo cikel 2, 3, 4, 5 (zamenjamo 2 in 5 ter 3 in 4), grafa ni težko dopolniti do ravninske risbe;
 - najmanjše število potez, da ga narišemo: ker ima 4 točke lihe stopnje, potrebujemo $4/2 = 2$ potezi.
3. Problem predstavimo kot problem iz teorije grafov takole: točke grafa so udeleženci tekmovanja (kandidati), dve točki sta povezani, če se ustrezna udeleženca pomerita. Ker vsak udeleženec odigra štiri tekme, iščemo graf na 10 točkah, kjer ima vsaka točka stopnjo štiri.
- Trojica, v kateri igra vsak igralec z vsakim, predstavlja trikotnik v grafu.
- Ker obstaja 4-regularen graf na 10 točkah brez trikotnikov, je odgovor na obe vprašanji pritrdilen (lahko sicer za odgovor na točko (a) konstruiramo drug graf, ni pa potrebno).
- Primer takega grafa je dvodelen graf (zagotovo nima trikotnikov!), ki ga dobimo iz $K_{5,5}$ tako, da v vsaki točki odstranimo eno povezavo.
4. Karakteristični polinom enačbe je $K(x) = x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = (x - 3)^2(x - 1)$. Ničli sta 3 (2. stopnje) in 1 (1. stopnje). Zato je splošna rešitev enačbe enaka

$$a_n = (A + B \cdot n)3^n + C \cdot 1^n.$$

Konstante A , B in C izračunamo iz začetnih pogojev:

$$\begin{aligned} a_0 &= (A + B \cdot 0)3^0 + C = A + C = 0, \\ a_1 &= (A + B \cdot 1)3^1 + C = 3A + 3B + C = 4, \\ a_2 &= (A + B \cdot 2)3^2 + C = 9A + 18B + C = 28. \end{aligned}$$

Rešimo sistem treh enačb s tremi neznankami in dobimo $A = -1$, $B = 2$ in $C = 1$. Rešitev gornje rekurzivne enačbe je torej

$$a_n = (-1 + 2n)3^n + 1.$$

1. izpit, 9. februar 2010

1. (a) Če števila -5 ne izberemo, lahko štiri števila izberemo na $2^4 = 16$ načinov - za vsako izmed štirih pozitivnih vrednosti se odločimo, ali zanjo izberemo pozitivni ali negativni predznak. Če izberemo število -5, izmed ostalih štirih pozitivnih vrednosti izberemo tri, za vsako pa izberemo še enega od dveh predznakov. To lahko storimo

na $\binom{4}{3} \cdot 2^3 = 32$ načinov. Skupaj imamo torej $16 + 32 = 48$ različnih načinov za izbiro štirih števil, ki so različna po absolutni vrednosti.

(b) Od števila vseh načinov izbire štirih števil odštejmo število tistih, pri katerih se eno število pojavi štirikrat. Izmed 9 števil lahko izberemo 4 s ponavljanjem na $\binom{9+4-1}{4} = \binom{12}{4} = 495$ načinov. Zraven smo šteli tudi 9 izbir, pri katerih štirikrat izberemo isto število. Ustrezni izbir je torej $495 - 9 = 486$.

(c) Da bo produkt negativen, moramo izbrati liho število negativnih faktorjev. Eno negativno in tri pozitivna števila lahko izberemo na $\binom{5}{1} \binom{4}{3} = 20$ načinov. Tri negativna in eno pozitivno števila lahko izberemo na $\binom{5}{3} \binom{4}{1} = 40$ načinov. Skupaj imamo torej $20 + 40 = 60$ ustreznih načinov.

2. Da pridemo od točke $(1, 2)$ do točke $(5, 9)$, moramo narediti 4 korake v desno in 7 korakov navzgor. Takšnih poti je natanko toliko, kot permutacij s ponavljanji 4 črk D in 7 črk N , le teh pa je $\binom{11}{4,7} = \frac{11!}{4!7!} = 330$.

Poti, ki vsebujejo del poti $(2, 2) - (3, 2) - (4, 2) - (4, 3)$ je 7, saj od točke $(1, 2)$ lahko pridemo do točke $(2, 2)$ samo na en način, od točke $(4, 3)$ pa lahko pridemo do točke $(5, 9)$ na $\binom{7}{1,6} = \frac{7!}{1!6!} = 7$ načinov (enkrat gremo desno in šestkrat navzgor). Poti, ki te podpoti ne vsebujejo je torej $330 - 7 = 323$.

3. Vsi trije grafi imajo enako število točk in enako število povezav. Tudi stopnje točk se ujemajo: po 4 točke imajo stopnjo 4 in po 4 točke imajo stopnjo 3. Opazimo pa, da so točke stopnje 4 v grafih G_2 in G_3 povezane med sabo (podgraf iz točk stopnje 4 je cikel dolžine 4 z eno diagonalno), v grafu G_1 pa sta povezani samo po dve točki stopnje 4. Torej graf G_1 ni izomorfen nobenemu od grafov G_2 in G_3 .

Izomorfizem med grafoma G_2 in G_3 najlažje najdemo, če opazimo, da sta sliki grafov enaki, ko graf G_3 zasukamo za 90 stopinj v smeri urinega kazalca. Bijektivna preslikavami med točkami grafov je podana v spodnji tabeli.

G_2	a	b	c	d	e	f	g	h
G_3	B	C	D	A	F	G	H	E

Ker sta grafa po zasuku G_3 za 90 stopinj enako narisana, se povezave v G_2 očitno preslikajo v povezave v G_3 .

4. Naj bo G enostaven povezan ravninski graf, narisani v ravnini tako, da ima 53 lic, vsako od lic pa ima na robu vsaj 5 povezav. Označimo z n število točk, z m število povezav in s f število lic grafa G . Ker ima vsako lice na robu vsaj 5 povezav, velja $2m \geq 5f$. Eulerjeva formula nam da enačbo

$$n - m + f = 2.$$

Enačbo pomnožimo z dva, upoštevamo povezavo med številom lic in povezav, vsstavimo število lic in dobimo

$$2n = 4 + 2m - 2f \geq 4 + 5f - 2f = 4 + 3f = 4 + 3 \cdot 53 = 163.$$

Velja torej $n \geq 81.5$. Ker je n celo število, mora torej veljati $n \geq 82$.

Graf G ima vsaj 82 točk.

2. izpit, 17. februar 2010

1. Iz kompleta 52 kart izberemo 13 kart (vrstni red ni pomemben).

- (a) Ker je samo 13 različnih vrednosti, moramo za vsako izmed vrednosti izbrati samo še eno izmed štirih barv. To lahko naredimo na 4^{13} načinov.
- (b) Če ne smemo izbrati nobenega asa, izbiramo 13 kart izmed 48 kart, kar lahko storimo na $\binom{48}{13}$ načinov.
- (c) Za izbiro natanko 10 kart iste barve sklepamo takole: najprej izberemo eno izmed štirih barv (na 4 načine), nato izmed 13 kart te barve izberemo 10 kart, kar lahko storimo na $\binom{13}{10}$ načinov. Sedaj je treba izbrati še tri karte izmed 39 kart preostalih barv, kar lahko storimo na $\binom{39}{3}$ načinov. Skupaj je torej $4 \cdot \binom{13}{10} \binom{39}{3}$ ustreznih izbir.
- (d) Sklepamo podobno kot v prejšnji točki, izberemo pa lahko 10, 11, 12 ali 13 kart iste barve. Imamo torej

$$4 \cdot \left(\binom{13}{10} \binom{39}{3} + \binom{13}{11} \binom{39}{2} + \binom{13}{12} \binom{39}{1} + \binom{13}{13} \binom{39}{0} \right) = 10688240$$

ustreznih načinov.

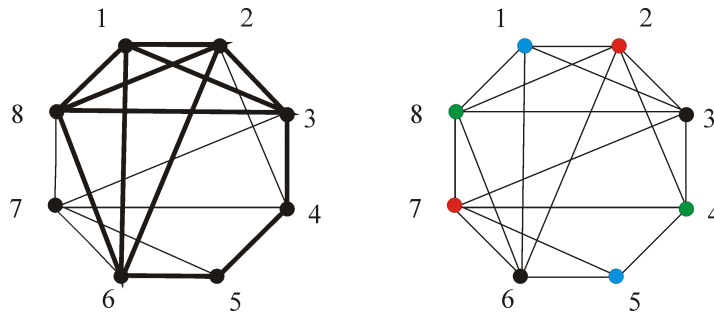
Opozorilo: rešitev, kjer najprej izberemo barvo in 10 kart te barve, nato pa še tri karte izmed vseh preostalih kart ni pravilna, saj nekatere možnosti štejemo večkrat! Preverimo: $4 \cdot \binom{13}{10} \binom{44}{3} = 15151136 \neq 10688240$.

2. Iz črk besede SLOVENIJA lahko sestavimo besedo dolžine 9 na $9!$ načinov, saj so vse črke različne. Če nobena dva samoglasnika ne smeta biti sosednja, sklepamo takole. Samoglasnike lahko uredimo na $4!$ načinov. Sedaj izberimo mesta, kamor bomo postavili soglasnike. Med vsaka dva samoglasnika moramo vrniti vsaj en soglasnik - zato porabimo 3 soglasnike. Ostaneta še dva soglasnika, ki lahko nastopata kjerkoli med samoglasniki in na začetku ali koncu besede. Dva elementa (soglasnika), ki ju ne razlikujemo, moramo razporediti v pet škatel (mesta za postavitev soglasnikov), ki jih razlikujemo in so lahko tudi prazne. To lahko storimo na $\binom{2+5-1}{2} = \binom{6}{2}$ načinov. Sedaj smo šele izbrali mesta, kjer bodo soglasniki. Na ta mesta pa lahko soglasnike razvrstimo na $5!$ načinov - vse možne permutacije petih elementov. Skupaj je torej $4! \binom{6}{2} 5!$ ustreznih besed.

3. Poglejmo po vrsti, kakšne lastnosti ima graf G :

- regularen ni, ker nimajo vse točke iste stopnje (npr. točka 1 ima stopnjo 4, točka 2 ima stopnjo 5);
- Eulerjev ni, ker nimajo vse točke sode stopnje (liho stopnjo imajo točke 2, 3, 5, 6, 7 in 8);
- ravninski ni, ker vsebuje subdivizijo grafa K_5 , na spodnji sliki levo so njene povezeve prikazane z odebeljenimi črtami.

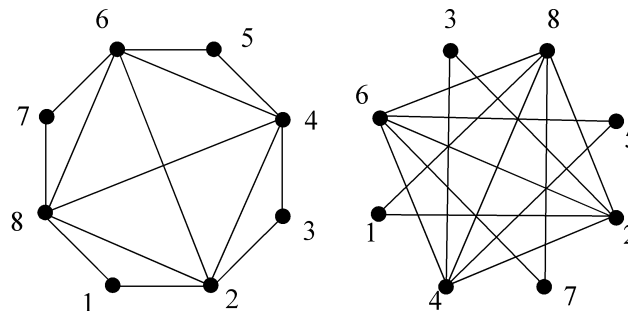
- Barvnost grafa je enaka 4. Potrebujemo najmanj 4 barve, ker graf vsebuje podgraf, izomorfen K_4 , sestavljen iz točk 1,2,3 in 8. Graf lahko pobarvamo s 4 barvami, glej spodnjo sliko desno. Barvnost grafa je torej enaka 4.



4. Na vajah smo pokazali, da je graf lahko izomorfen svojemu komplementu le v primeru, da je ostanek pri deljenju števila točk s 4 enak 0 ali 1. Za graf na 8 točkah je torej mogoče, da je izomorfen svojemu komplementu.

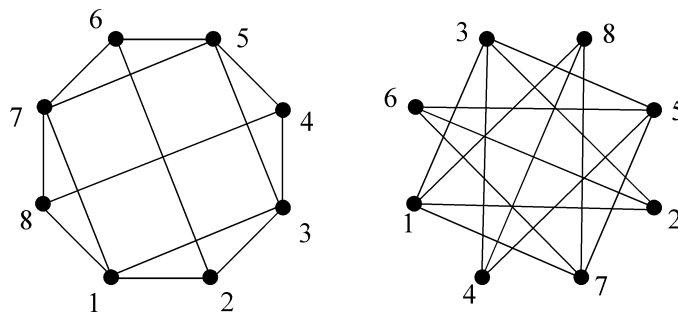
Najprej ugotovimo, kolikšne morajo biti stopnje točk v grafu, da bo lahko izomorfen svojem komplementu. V grafu, ki ima Hamiltonov cikel, ima vsaka točka stopnjo vsaj 2. V komplementu bo točka stopnje 2 imela stopnjo 5. Torej moramo imeti v grafu toliko točk stopnje 5 kot imamo točk stopnje 2. Podobno moramo imeti toliko točk stopnje 3 kot točk stopnje 4. Točk stopnje 6 ali 7 ne moremo imeti, sicer komplement nima Hamiltonovega cikla, saj ima točke stopnje 1 oziroma 0.

Sedaj poskusimo konstruirati ustrezen graf: najprej narišemo cikel dolžine 8 in dodamo nekaj povezav tako, da bodo točke imele ustrezne stopnje. Poskusimo sestaviti graf s 4 točkami stopnje 2 in 4 točkami stopnje 5, glej spodnjo sliko, levo. Sedaj narišemo še njegov komplement in preverimo, da sta grafa izomorfna. Izomorfizem je podan z oštevilčenjem točk: točka na levi se preslika v točko na desni z isto oznako. Ni težko preveriti, da se tudi povezave preslikajo v povezave - najprej preverimo, da ima tudi drugi graf Hamiltonov cikel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1 in nato preverimo še, da ima drugi graf preostale povezave (2 : 4), (2 : 6), (2 : 8), (4 : 6), (4 : 8) in (6 : 8).



Lahko sestavimo tudi graf, ki ima 4 točke stopnje 3 in 4 točke stopnje 4, glej spodnjo

sliko levo. Podobno kot v prejšnjem primeru še preverimo, da je res izomorfen svojemu komplementu.



3. izpit, 16. september 2010

1. Beseda MATEMATIK vsebuje 6 različnih črk; M, A in T se pojavijo po dvakrat.

- (a) Če ni dodatnih omejitev, lahko iz črk besede MATEMATIK sestavimo $\binom{9}{2,2,2} = \frac{9!}{2! 2! 2!} = 45360$ različnih besed, kolikor je permutacij s ponavljanji dolžine 9, pri katerih se 3 črke pojavijo po dvakrat.
- (b) Če se oba M-ja pojavita zaporedoma, ju lahko štejemo za eno (dvojno) črko. Tako štejemo vse besede dolžine 8, pri katerih se dve črki pojavita po dvakrat. Le-teh pa je $\binom{8}{2,2} = \frac{8!}{2! 2!} = 10080$.
- (c) Uporabimo pravilo vključitev in izključitev. Od števila vseh besed odštejemo število tistih, pri katerih se po dve enaki črki pojavita skupaj. Potem pa je treba prišteti število tistih besed, pri katerih se dvakrat po dve črki pojavita skupaj in zopet odšteti število tistih besed, pri katerih se pojavijo vse tri črke po dvakrat skupaj. Dobimo

$$\frac{9!}{2! 2! 2!} - \binom{3}{1} \frac{8!}{2! 2!} + \binom{3}{2} \frac{7!}{2!} - 6! = 21960$$

ustreznih besed.

2. Najprej rešimo homogeno enačbo. Karakteristični polinom enačbe $K(x) = x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$ ima eno dvojno ničlo, $x = -3$. Zato je splošna rešitev homogene enačbe enaka

$$a_n = (A + B n) \cdot (-3)^n.$$

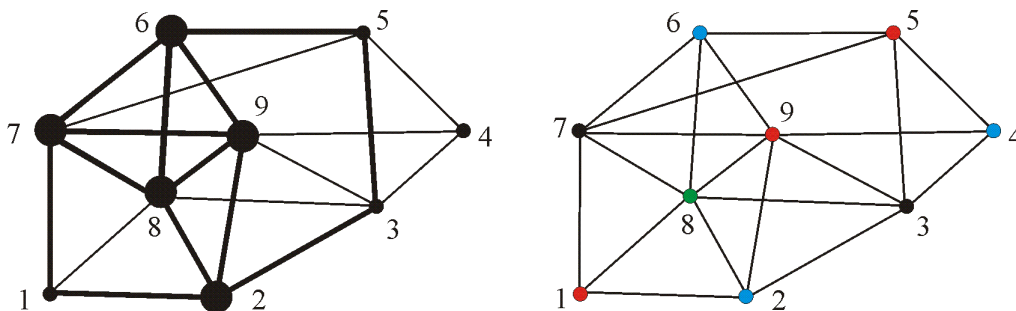
Sedaj potrebujemo še posebno rešitev. Za člen 2^n vzamemo nastavek $a_n = C \cdot 2^n$; upoštevamo, da 2 ni ničla karakterističnega polinoma. Nastavek vstavimo v rekurzivno enačbo in dobimo $C \cdot 2^{n+2} + 6C \cdot 2^{n+1} + 9C \cdot 2^n = 2^n$. Od tod izračunamo $C = 1/25$.

Za člen n , ki je polinom prve stopnje, vzamemo nastavek $a_n = Dn + E$; upoštevamo, da 1 ni ničla karakterističnega polinoma. Nastavek vstavimo v rekurzivno enačbo in dobimo enačbo $D(n+2) + E + 6D(n+1) + 6E + 9Dn + 9E = n$. S primerjavo koeficientov pri n in prostem členu dobimo enačbi $D + 6D + 9D = 1$ in $2D + E + 6D + 6E + 9E = 0$, od koder izračunamo $D = 1/16$ in $E = -1/32$. Splošna rešitev rekurzivne enačbe je torej enaka

$$a_n = (A + Bn) \cdot (-3)^n + \frac{1}{16}n - \frac{1}{32}.$$

3. Poglejmo po vrsti, kakšne lastnosti ima dani graf:

- regularen ni, saj nimajo vse točke iste stopnje (na primer, točka 1 ima stopnjo 3, točka 2 pa ima stopnjo 4);
- dvodelen ni, ker vsebuje cikle lihe dolžine, na primer trikotnik 1, 2, 8, 1;
- Eulerjev ni, ker nimajo vse točke sode stopnje (liho stopnjo imajo kar 4 točke, to so 1, 3, 4 in 7);
- ravninski ni, ker vsebuje subdivizijo grafa K_5 ; njene povezave so prikazane z odebeljenimi črtami na spodnji sliki levo.
- Barvnost grafa je enaka 4. Potrebujemo najmanj 4 barve, ker graf vsebuje kliko velikosti 4 (sestavljajo jo točke 6, 7, 8 in 9). Graf lahko pobarvamo s 4 barvami, glej spodnjo sliko na desni. Barvnost grafa je torej enaka 4.



4. Naj bo G graf na 6 točkah.

- Če ni nobenih dodatnih omejitev ima lahko najmanj 0 in največ $\binom{6}{2} = 15$ povezav.
- Če je G povezan, mora imeti vsaj 5 povezav (drevo), največ pa jih ima lahko 15.
- Če G ni povezan, ima lahko najmanj 0 povezav, največ pa jih ima, če ima dve komponenti, od katerih je ena izomorfná K_5 , druga pa K_1 . V tem primeru imamo $\binom{5}{2} = 10$ povezav. Pri vseh drugih razdelitvah imamo manj povezav (2+4 točke: največ 7 povezav, 3+3 točke: največ 6 povezav).

1. kolokvij, 24. november 2010

1. Izbrati moramo začetno in končno postajo. To lahko storimo na $k \cdot (k - 1)$ načinov. Imamo torej $k \cdot (k - 1)$ različnih vozovnic.

Da izračunamo število vozovnic za vsaj dve postaji, od števila vseh vozovnic odštejemo število tistih za eno postajo. Teh pa je $2 \cdot (k - 1)$, saj lahko za vsako smer na $k - 1$ načinov izberemo začetno postajo, končna pa je s tem že določena. Imamo torej $k \cdot (k - 1) - 2 \cdot (k - 1)$ ustreznih vozovnic.

2. (a) Ločimo primera, ko je enica na prvem mestu in ko ni. Če je enica na prvem mestu, je potem na preostalih $n - 1$ mestih lahko katera koli od preostalih devetih števk. Takih možnosti je torej 9^{n-1} . Če enica ni na prvem mestu, potem je na prvem mestu ena od preostalih števk razen ničle, torej 8 možnosti. Izmed preostalih $n - 1$ mest moramo izbrati eno mesto, na katerem je enica. To lahko naredimo na $n - 1$ načinov. Na preostalih $n - 2$ mestih se lahko pojavijo vse številke razen 1. Takih možnosti je torej $8(n - 1) \cdot 9^{n-2}$. Skupaj imamo torej $9^{n-1} + 8(n - 1) \cdot 9^{n-2}$ desetiških števil, ki vsebujejo natanko eno enko.

(b) Ločimo primera, ko je enica na prvem mestu in ko ni. Če je enica na prvem mestu, potem sme biti na preostalih mestih le še ena enica. Teh mest je $n - 1$ kar je ravno število možnosti za postavitev enice. Na preostalih $n - 2$ mestih je lahko katera koli od preostalih devetih števk. Takih možnosti je torej $(n - 1)9^{n-2}$. Če enica ni na prvem mestu, potem je na prvem mestu ena od preostalih števk razen ničle, torej 8 možnosti. Izmed preostalih $n - 1$ mest moramo izbrati dve mesti, na katerih sta enici. To lahko naredimo na $\binom{n-1}{2}$ načinov. Na preostalih $n - 3$ mestih se lahko pojavijo vse številke razen 1. Takih možnosti je torej $8\binom{n-1}{2}9^{n-3}$. Skupaj je vseh možnosti $(n - 1)9^{n-2} + 8\binom{n-1}{2}9^{n-3}$.

(c) Izračunamo število vseh n -mestnih števil in odštejemo število tistih z nič in z eno enico. Vseh števil je $9 \cdot 10^{n-1}$, saj na prvem mestu ne sme biti ničle, na ostalih mestih pa so lahko vse številke. Števil brez enice je $8 \cdot 9^{n-1}$. Koliko je števil z eno enico, smo izračunali v točki (a). Ustreznih števil je torej

$$9 \cdot 10^{n-1} - 8 \cdot 9^{n-1} - (9^{n-1} + 8(n - 1) \cdot 9^{n-2}).$$

3. Ker so številke majhne, lahko nalogo rešimo tudi z naštetjem vseh možnosti. Tukaj bomo predstavili rešitev z uporabo porazdelitev. Celice so barve - so označene in so lahko prazne. Elementi so žoge - jih ne razlikujemo (barva žoge je določena z izbiro celice).

(a) Celice so 3, elementi so 4, ustreznih porazdelitev je

$$\binom{4 + 3 - 1}{4} = \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15.$$

(b) Naj bo A_1 množica takih razporeditev žog, da je v rdeči škatli vsaj 6 žog, A_2 množica takih razporeditev žog, da je v modri škatli vsaj 6 žog in A_3 množica takih

razporeditev žog, da je v zeleni škatli vsaj 11 žog. Označimo z U množico vseh razporeditev žog. Iščemo torej $|U| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$.

Za izračun moči unije bomo uporabili pravilo vključitev in izključitev. Najprej izračunajmo moči presekov:

$$\begin{aligned} |U| &= \binom{12+3-1}{12} = \binom{14}{12} = \binom{14}{2} = 91 \\ |A_1| &= |A_2| = \binom{6+3-1}{6} = \binom{8}{6} = \binom{8}{2} = 28 \\ |A_3| &= \binom{1+3-1}{1} = \binom{3}{1} = 3 \\ |A_1 \cap A_2| &= 1 \\ |A_1 \cap A_3| &= |A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0. \end{aligned}$$

Za izračun moči množice A_1 si predstavljamo, da najprej v rdečo škatlo damo 6 žog in potem delimo samo še 6 žog. Za izračun moči množice A_2 si predstavljamo, da najprej v modro škatlo damo 6 žog in potem delimo samo še 6 žog in tako naprej. Načinov za izbiro 12 žog je torej

$$91 - 28 - 28 - 3 + 1 = 33.$$

- Da bo produkt $(p_1 - 1)(p_2 - 2) \dots (p_n - n)$ sodo število, mora biti vsaj eden izmed faktorjev sod. To pa pomeni, da morata biti oba člena v faktorju iste parnosti - oba soda ali oba liha. Med števili $1, 2, \dots, n$ je $(n - 1)/2$ sodih števil in $(n + 1)/2$ lihih števil, saj je n liho. Lihih števil je torej več kot sodih. Enako velja za števila $p_1, p_2, \dots, p_n$. Zato se ne more zgoditi, da bi bila v vsakem faktorju člena različne parnosti - vsaj en faktor je takšen, da sta oba člena liha. Potem pa je njuna razlika soda in je tudi celoten produkt sod.

2. kolokvij, 12. januar 2011

- Problem predstavimo kot problem iz teorije grafov takole: točke grafa G so ljudje, dve točki sta povezani, če se ustrezna človeka ne poznata. Sedežni red je potem Hamiltonov cikel v grafu G .

Graf ima 10 točk. Ker vsak človek pozna natanko tri ljudi, ne pozna šestih ljudi. Vsaka točka v grafu ima torej stopnjo 6. Ker je stopnja vsake točke enaka 6 in $6 \geq 5 = 10/2$, ima po Diracovem izreku graf G Hamiltonov cikel. Ustrezni sedežni red torej obstaja.

Nalogo lahko rešimo tudi tako, da dve točki povežemo, če se ustrezna človeka poznata. V tem primeru iščemo Hamiltonov cikel v komplementu grafa.

- Vsak od grafov ima dve točki lihe stopnje. Torej ima Eulerjev sprehod, ne pa obhoda. Graf ima Eulerjev obhod samo, če imajo vse njegove točke sodo stopnjo. Potrebujemo eno potezo - število točk lihe stopnje delimo z 2.

Graf A ni Hamiltonov po razpadnem kriteriju: če odstranimo točko 2, graf razpade na 2 komponenti. Dvodelen ni, saj ima cikel lihe dolžine 2, 5, 9, 2.

Graf C je dvodelen, saj lahko njegove točke razdelimo na množici $V_1 = \{1, 2, 7, 8, 9\}$ in $V_2 = \{3, 4, 5, 6\}$ tako, da ima vsaka povezava eno krajišče v množici V_1 , drugo pa v množici V_2 . Hamiltonov ni, saj je dvodelen in imata množici iz dvodelnega razbitja različno moč, $|V_1| \neq |V_2|$.

Graf B ni Hamiltonov po razpadnem kriteriju: če odstranimo točki 4 in 7, graf razpade na 3 komponente. Dvodelen ni, saj ima cikel lihe dolžine, na primer 1, 2, 7, 6, 5, 4, 3, 1.

Graf D ni Hamiltonov po razpadnem kriteriju: če odstranimo točko 3, graf razpade na 2 komponenti. Dvodelen ni, saj ima cikel lihe dolžine 4, 5, 6, 4.

3. Graf C je dvodelen, zato ni izomorfen nobenemu od grafov A, B, D . Grafa A in D imata trikotnik, graf B pa ne. Torej graf B ni izomorfen nobenemu od grafov A in D .

Grafa A in D sta izomorfna. To najlažje preverimo tako, da graf A lepše narišemo - da izgleda enako kot graf D in potem preslikamo točke grafa A v istoležne točke grafa D . Oba grafa sta sestavljena iz trikotnika, šestkotnika in mostu med njima. Most preslikamo v most, trikotnik v trikotnik in šestkotnik v šestkotnik. Primer izomorfizma je podan v spodnji tabeli (jih je več, saj lahko trikotnika in šestkotnika zasukamo). Izomorfizem podamo s permutacijo točk:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 5 & 3 & 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Sedaj je potrebno preveriti še, da se povezave preslikajo povezave. Če sta grafa enako narisana, je to očitno. Sicer za vsako povezavo posebej to preverimo.

4. Označimo z a_n število nizov dolžine n iz znakov 0, 1, 2, 3, pri katerih se 3 nikoli ne pojavi za 0. Najprej poiščimo rekurzivno enačbo, ki ji zadošča zaporedje (a_n) . Vsak niz dolžine $n - 1$ lahko nadaljujemo z 0, 1 ali 2. Nizov dolžine n , pri katerih se 3 ne pojavi za 0 in se končajo z 0, 1 ali 2 je torej $3a_{n-1}$. Če se niz dolžine n konča s 3, na nobenem od prejšnjih $n - 1$ mest ne sme biti ničle. Vsi drugi nizi so ustrezni. Imamo torej 3^{n-1} nizov dolžine n , pri katerih se 3 ne pojavi za 0 in se končajo s 3. Velja torej zveza

$$a_n = 3a_{n-1} + 3^{n-1}$$

oziroma

$$a_{n+1} - 3a_n = 3^n.$$

Ker je rekurzivna enačba prvega reda, potrebujemo še en začetni člen, $a_1 = 4$, saj so vsi nizi dolžine 1 ustrezni.

Najprej rešimo homogeno enačbo. Karakteristični polinom enačbe $K(x) = x - 3$ ima eno ničlo 1. stopnje, $x = 3$. Zato je splošna rešitev homogene enačbe enaka

$$a_n = A \cdot 3^n.$$

Sedaj potrebujemo še posebno rešitev, ki jo izračunamo z nastavkom $a_n = B \cdot n \cdot 3^n$. Ker je 3 ničla karakterističnega polinoma, je bilo potrebno dodati faktor n . Nastavek vstavimo v rekurzivno enačbo in dobimo $B = 1/3$. Splošna rešitev rekurzivne enačbe je tako enaka

$$a_n = A \cdot 3^n + \frac{1}{3} n 3^n.$$

Konstanto A izračunamo iz začetnega pogoja: $a_1 = 4 = 3A + 3$, torej je $A = 1$. Rešitev enačbe je torej

$$a_n = 3^n + \frac{1}{3} n 3^n.$$

1. izpit, 3. februar 2011

1. Lihih števk je 5, sodih števk je 5 in šestmestno število ima šest mest, a se ne sme začeti z 0. Obravnavamo dve možnosti: na prvem mestu je soda števka ali na prvem mestu je liha števka. V vsakem od primerov pa imamo lahko 1, 3 ali 5 lihih števk.

Če je na prvem mestu liha števka, jo lahko izberemo na 5 načinov. Če imamo samo eno liho števko, je ostalih pet števk sodih in jih lahko izberemo na 5^5 načinov. Če imamo tri lihe števke, je ena že na prvem mestu, izbrati pa moramo še dve izmed petih mest za preostali dve. Za pet lihih števk moramo izbrati štiri mesta izmed preostalih 5. Za vsako izmed petih mest pa imamo še 5 možnih vrednosti. Skupaj imamo torej

$$5 \cdot \left(1 + \binom{5}{2} + \binom{5}{4} \right) \cdot 5^5 = 16 \cdot 5^6 = 250000$$

števil, ki se začnejo z liho števko.

Podobno sklepamo, če je na prvem mestu soda števka, le da v tem primeru ne smemo izbrati ničle za prvo mesto, na preostala mesta pa postavimo po 1, 3 ali 5 lihih števk. Imamo torej

$$4 \cdot \left(\binom{5}{1} + \binom{5}{3} + \binom{5}{5} \right) \cdot 5^5 = 4 \cdot 16 \cdot 5^5 = 200000$$

števil, ki se začnejo s sodo števko. Skupaj imamo torej $250000 + 200000 = 450000$ ustreznih števil.

Do rešitve vodi tudi bližnjica. Vseh šestmestnih števil je $9 \cdot 10^5 = 900000$, ker na prvem mestu ne sme biti ničle, na preostalih mestih pa lahko nastopi katerakoli od destih števk. Števil z lihim številom lihih števk je ravno toliko kot tistih s sodim številom lihih števk.

To pokažemo tako, da poiščemo bijekcijo med njimi. Na primer, če na zadnjem mestu zamenjamo 0 z 1, 1 z 2, 2 s 3, ..., 8 z 9 in 9 z 0, smo številu z lihim številom števk priredili število s sodim številom števk. Obratna preslikava preslika števila s sodim številom lihih števk v števila z lihim številom lihih števk. Preslikavi sta očitno bijekciji. Torej je vseh šestmestnih števil z lihim številom lihih števk enako $900000/2 = 450000$.

2. Nalogo rešujemo z nekoliko prirejenim Dirichletovim načelom: kvadrat bi radi razdelili na več kot 4049 celic, da bi vsaj ena celica ostala prazna - le ta bi ustrezala pravokotniku velikosti 10×20 , ki ima prazen presek z vsakim izmed žetonov.

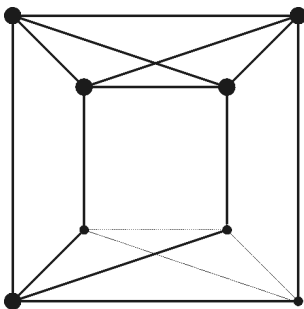
Če za celice vzamemo kar mrežo pravokotnikov velikosti 10×20 , ki se dotikajo, dobimo sicer $50 \cdot 100 = 5000$ celic, a en žeton se lahko seka kar s štirimi celicami naenkrat in gornje ideje ne moremo uporabiti. Celice moramo izbrati tako, da se en žeton ne more dotikati dveh celic naenkrat.

Na primer, za celice izberemo pravokotnike velikosti 10×20 , ki se ne dotikajo, razdalja med njimi pa je več kot 1, na primer 1.1. Takšnih pravokotnikov lahko v kvadrat s stranico 1000 postavimo vsaj

$$\left\lfloor \frac{1000}{11.1} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{1000}{21.1} \right\rfloor = 90 \cdot 47 = 4230.$$

Vsak žeton je v največ eni celici, zato vsaj ena celica ostane prazna. Torej imamo pravokotnik velikosti 10×20 , ki ima prazen presek z vsakim izmed žetonov.

3. Graf G ni ravninski, saj vsebuje subdivizijo grafa K_5 . Sestavljajo jo na primer gornje 4 točke in ena od spodnjih, glej sliko, kjer so točke in povezave subdivizije K_5 odebeljene. (V grafu G lahko najdemo tudi subdivizijo grafa $K_{3,3}$).



Graf G ni samokomplementaren. Vse njegove točke imajo stopnjo 4, točke v $\bar{G}$ pa imajo stopnjo $8 - 1 - 4 = 3$. Torej G in $\bar{G}$ ne moreta biti izomorfna.

Ker graf G vsebuje kliko velikosti 4 (sestavljajo jo na primer gornje 4 točke), potrebujemo vsaj 4 barve. Zgornjo mejo lahko dobimo z barvanjem točk (graf pobarvamo s 4 barvami) ali iz Brooksovega izreka: za barvanje grafa, ki ni poln graf ali lih cikel, potrebujemo največ $\Delta(G) = 4$ barve. Barvnost grafa G je torej enaka 4.

4. Nobena od trditev ne drži, saj lahko za vsako najdemo protiprimer. Protiprimer za trditvi (a) in (c) je lahko kar cikel na 4 točkah. Je Hamiltonov in Eulerjev na sodem številu točk. Njegov komplement je sestavljen iz dveh kopij K_2 , to je iz dveh kopij grafa na dveh točkah z eno povezavo. Le-ta pa ni niti Hamiltonov, niti Eulerjev, saj sploh ni povezan in zato ne more imeti niti Hamiltonovega cikla niti Eulerjevega obhoda.

Protiprimer za točko (b) je na primer pot na treh točkah. Ni Hamiltonov, saj ima točke stopnje 1. Njegov komplement tudi ni Hamiltonov, saj ni povezan (ima samo eno povezavo).

Za komplement Eulerjevega grafa, ki ima liho število točk, sicer velja, da imajo vse njegove točke sodo stopnjo. Vendar se lahko zgodi, da ni povezan! Vzemimo na primer graf

$$K_9 \setminus \{(1:2), (2:3), (1:3), (4:5), (5:6), (4:6), (7:8), (8:9), (7:9)\}.$$

Ima 9 točk stopnje 6 in je povezan, torej ima Eulerjev obhod. Njegov komplement pa je sestavljen iz treh trikotnikov. Vse točke komplementa imajo sicer sodo stopnjo (dve), a graf ni povezan in zato ne more imeti Eulerjevega obhoda.

2. izpit, 17. februar 2011

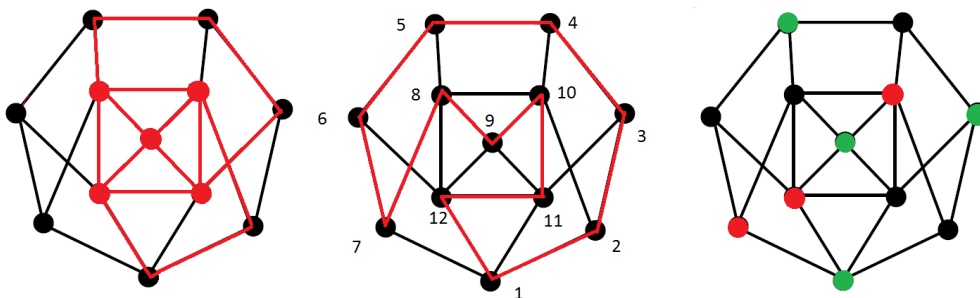
1. Popolnih kvadratov med števili od 1 do 10000000 je 1000 (to so števila $1^2, 2^2, \dots, 1000^2$), popolnih kubov pa je 100 (to so števila $1^3, 2^3, \dots, 100^3$). Števil, ki so hkrati popolni kvadrati in popolni kubi, je 10 (to so števila $1^6, 2^6, \dots, 10^6$). Po pravilu vključitev in izključitev dobimo

$$10000000 - 1000 - 100 + 10 = 998910$$

števil, ki niso niti popolni kvadrati, niti popolni kubi.

2. Vsota treh števil je sodo število, če so vsa tri sode ali če sta dve števili lihi in eno sodo. V množici $\{1, 2, \dots, 100\}$ je 50 sodih in 50 lihih števil. Tri sode števila lahko zato s ponavljanjem izberemo na $\binom{50+3-1}{3} = 22100$ načinov, dve lihi in eno sodo pa na $\binom{50+2-1}{2} \binom{50}{1} = 1275 \cdot 50 = 63750$ načinov. Skupaj lahko tri števila s sodo vsoto izberemo na $22100 + 63750 = 85850$ načinov.
3. Graf G ni ravninski, saj vsebuje subdivizijo grafa K_5 , glej sliko spodaj, levo. Graf G ima Hamiltonov cikel, na primer 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 1, glej sliko spodaj v sredini, kjer so povezave, ki so v Hamiltonovem ciklu, pobarvane rdeče. Barvnost grafa G je enaka tri. Sklepamo takole. Ker graf vsebuje kliko velikosti 3 (na primer trikotnik 8, 9, 10, 8), potrebujemo vsaj tri barve. Ker se da graf pobarvati s tremi barvami, glej sliko spodaj, desno, potrebujemo največ 3 barve.
4. (a) Naj bo G enostaven graf na 25 točkah, ki ima 24 povezav in ni povezan. Ker graf G ni povezan, ima vsaj dve povezani komponenti. Označimo s t število povezanih komponent grafa G in z n_i , $i = 1, \dots, t$, števila točk v posamezni komponenti. Povezan graf z n_i točkami, ki nima cikla, ima največ $n_i - 1$ povezav. Če graf G nima nobenega cikla, potem ima največ

$$\sum_{i=1}^t (n_i - 1) = 25 - t$$



povezav. Ker je $t \geq 2$, je to največ 23 povezav. Protislovje. Torej mora imeti graf G cikel. Trditev velja.

- (b) Trditev ne velja. Protiprimer je na primer graf, ki je sestavljen iz poti na 24 točkah in ene izolirane točke. Ni povezan, ima 23 povezav, vendar ne vsebuje nobenega cikla.

3. izpit, 5. september 2011

- Nalogo rešimo s pomočjo porazdelitev - prijatelji so elementi (jih razlikujemo), škatle so sokovi (jih razlikujemo) in škatle ne smejo biti prazne. Takšnih porazdelitev je $4!S(5, 4) = 24 \cdot 10 = 240$.
- Imamo 19 črk, nekatere se pojavijo večkrat: A se pojavi štirikrat, T se pojavi trikrat, E, I, K, M pa se pojavijo po dvakrat. Sestavimo lahko torej

$$\binom{19}{4, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1} = \frac{19!}{4! 3! 2! 2! 2! 2!} = 52797352608000$$

različnih besed. Besedo *MATEMATIKA* vsebuje $10! = 3628800$ različnih besed. Sklepamo takole: besedo *MATEMATIKA* štejemo za eno enoto. Tako imamo le 10 "črk", od katerih se nobena ne pojavi večkrat.

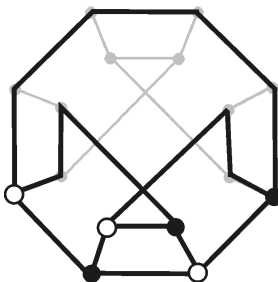
Besedo *DISKRETNA* vsebuje

$$\binom{11}{3, 2, 2, 1, 1, 1, 1} = \frac{11!}{3! 2! 2!} = 1663200$$

različnih besed. Sklepamo takole: besedo *DISKRETNA* štejemo za eno enoto. Tako imamo le 11 "črk", od katerih se A pojavi trikrat, M in T pa se pojavita po dvakrat. Imamo le dve besedi, ki vsebujeta obe besedi, *DISKRETNA* in *MATEMATIKA*. Po pravilu vključitev in izključitev je besed, ki ne vsebujejo niti besede *DISKRETNA* niti besede *MATEMATIKA* enako

$$52797352608000 - (3628800 + 1663200) + 2 = 52797347316002.$$

3. Graf G_1 ni ravninski, ker vsebuje subdivizijo grafa $K_{3,3}$; na spodnji sliki so njene povezeve prikazane s temnejšimi odebeljenimi črtami. Graf G_1 ima Hamiltonov cikel: če potujemo po zunanem ciklu in izmenično obiščemo po dve točki zunanjega cikla in dve točki v notranjosti, obiščemo vse točke in končamo, kjer smo začeli. Graf G_1 je dvodelen, torej je njegova barvnost enaka 2. Grafa G_1 ni izomorfen grafu G_2 , saj prvi vsebuje cikle dolžine štiri, drugi pa ne.



4. Problem predstavimo kot problem iz teorije grafov takole: točke grafa G so polja šahovnice, dve točki sta povezani, če imata na šahovnici skupno stranico. Zanima nas, ali obstaja Hamiltonova pot z začetkom v točki, ki ustreza spodnjemu levemu vogalnemu polju, in koncem v točki, ki ustreza desnemu gornjemu vogalnemu polju. Graf G je enak grafu $P_8 \square P_8$. Ta graf je dvodelen. Če njegove točke pobarvamo z dvema barvama, bosta vogalni točki, ki nas zanimata, iste barve. Hamiltonova pot pa ima sodo število vozlišč (64), kar pomeni, da bosta njen začetek in konec različne barve. Torej Hamiltonova pot z začetkom in koncem v nasprotnih vogalnih točkah ne obstaja.

1. kolokvij, 23. november 2011

- Izpit je opravilo 18 študentav, 14 študentov pa izpita ni opravilo.
 - Študent, ki je izpit opravil, je rešil največ pet nalog, študent, ki izpita ni opravil, pa največ eno. Skupaj torej največ $18 \cdot 5 + 14 \cdot 1 = 104$.
 - Študent, ki je izpit opravil, je rešil najmanj dve nalogi, študent, ki izpita ni opravil, pa najmanj nič. Skupaj torej najmanj $18 \cdot 2 + 14 \cdot 0 = 36$.
 - Če bi vsako nalogo rešilo največ 7 študentov, ne bi mogli rešiti najmanj 36 nalog, saj je $5 \cdot 7 = 35 < 36$. Torej je vsaj eno nalogo rešilo vsaj 8 študentov.
 - Če bi vsako nalogo rešilo vsaj 21 študentov, bi skupaj rešili $21 \cdot 5 = 110 > 104$ nalog. Torej je vsaj eno nalogo rešilo največ 20 študentov.
- Da od točke $(0, 0)$ pridemo v točko $(8, 10)$, se moramo premakniti za 8 enot v desno in 10 enot navzgor. Ker naredimo tri korake v smeri $(1, 1)$, je treba narediti še 5 korakov v desno in 7 korakov navzgor. Vseh korakov skupaj je torej $3 + 5 + 7 = 15$.

Korake v različnih smereh lahko naredimo v poljubnem vrstnem redu, skupaj torej na

$$\binom{15}{3, 5, 7} = \frac{15!}{3! 5! 7!} = 360360$$

načinov.

3. Od 14 študentov jih 5 vedno sedi v prvi vrsti, 4 vedno v drugi vrsti, 5 pa jih lahko sedi v prvi ali drugi vrsti.

Izberemo 5 sedežev v prvi vrsti in nanje posadimo 5 študentov, ki vedno sedijo v prvi vrsti. Nato izberemo 4 sedeže v drugi vrsti in nanje posadimo 4 študente, ki vedno sedijo v drugi vrsti. Izmed preostalih 7 sedežev v prvi in drugi vrsti izberemo še 5 sedežev za preostale študente. Skupaj to naredimo na

$$\binom{8}{5} 5! \cdot \binom{8}{4} 4! \cdot \binom{7}{5} 5! = 28449792000$$

načinov.

4. Razporedov šestih ljudi okoli okrogle mize je toliko, kot je cikličnih permutacij šestih elementov, le-teh pa je $(6 - 1)! = 5! = 120$.

Pri drugem delu naloge od števila vseh razporedov odštejemo število tistih, kjer vsaj en par sedi skupaj. Razporedov, kjer prvi par sedi skupaj, je $4! \cdot 2$: če prvi par štejejo kot eno enoto, štejejo ciklične permutacije petih enot, na dva načina pa določimo še vrstni red para. Podobno dobimo, da je število razporeditev, kjer prvi in drugi par sedi skupaj, enako $3! \cdot 2^2$, vsi trije pari sedijo skupaj pa na $2! \cdot 2^3$ načinov. Po pravilu vključitev in izključitev dobimo

$$5! - \binom{3}{1} 4! \cdot 2 + \binom{3}{2} 3! \cdot 2^2 - \binom{3}{3} 2! \cdot 2^3 = 32$$

načinov.

2. kolokvij, 30. januar 2012

1. Z a_n označimo število načinov, na katere lahko pokrijemo šahovnico velikosti $2 \times n$ s ploščicami velikosti 2×1 in 2×2 . Najprej izračunajmo prvih nekaj členov zaporedja (a_n) .

$$a_1 = 1 \quad (1 \text{ navpična ploščica } 2 \times 1)$$

$$a_2 = 3 \quad (2 \text{ navpični ali dve vodoravni ploščici } 2 \times 1 \text{ ali ena ploščica } 2 \times 2)$$

$$a_3 = 5$$

Pokrivanje šahovnice lahko zaključimo na tri načine: z eno navpično ploščico velikosti 2×1 , z dvema vodoravnima ploščicama 2×1 ali pa s ploščico velikosti 2×2 . V prvem primeru najprej na vse možne načine pokrijemo šahovnico velikosti $2 \times (n - 1)$,

kar lahko storimo na a_{n-1} načinov. V drugem in tretjem primeru pa najprej na vse možne načine pokrijemo šahovnico velikosti $2 \times (n-2)$, kar lahko storimo na a_{n-2} načinov. Velja torej

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}.$$

Karakteristični polinom enačbe $K(x) = x^2 - x - 2$ ima dve ničli, 2 in -1 , ki sta obe stopnje 1. Zato je splošna rešitev enačbe enaka

$$a_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n.$$

Konstanti A in B izračunamo iz začetnih pogojev.

$$\begin{aligned} a_1 &= A + B = 1, \\ a_2 &= 4A + B = 3. \end{aligned}$$

Rešimo sistem dveh enačb z dvema neznankama in dobimo $A = 2/3$ in $B = 1/3$. Rešitev gornje rekurzivne enačbe je torej

$$a_n = \frac{2}{3} \cdot 2^n + \frac{1}{3} \cdot (-1)^n.$$

2. Najprej prvi sumand $A(x)$ razstavimo na parcialne ulomke,

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{x^2}{(x-2)^3},$$

nato $A(x)$ zapišemo kot vsoto formalnih potenčnih vrst:

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{3}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x} - x^2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{x}{2}\right)^3} \\ &= -\frac{1}{6} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{x}{3}\right)^n + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} x^n - \frac{x^2}{8} \sum_{n \geq 0} \binom{3+n-1}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Prva dva člena zaporedja izračunamo posebej,

$$a_n = -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2} \quad \text{za } n = 0, 1.$$

Za $n \geq 2$ pa je

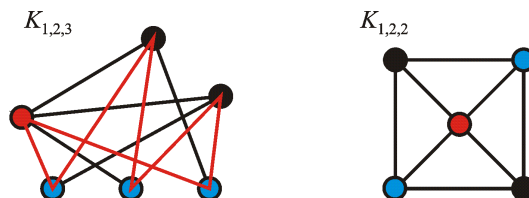
$$a_n = -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \binom{n}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}.$$

Torej je

$$a_4 = -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1207}{3888}.$$

3. (a) Graf $K_{1,2,3}$ ima Hamiltonov cikel, glej spodnjo sliko, na kateri so povezave iz Hamiltonovega cikla pobarvane rdeče. Graf $K_{1,2,4}$ nima Hamiltonovega cikla po razpadnem kriteriju: če odstranimo tri točke (eno rdečo in dve črni), graf razpade na štiri komponente (štiri modre točke, ki med sabo niso povezane).

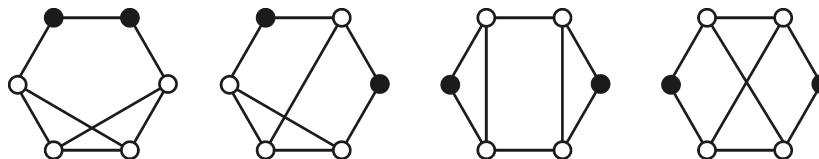
- (b) Graf $K_{1,2,2}$ je ravninski, saj ga lahko v ravnino narišemo tako, da se njegove povezave ne sekajo, glej sliko spodaj. Graf $K_{1,2,3}$ ni ravninski, saj vsebuje $K_{3,3}$ kot podgraf - samo izpustimo povezavi med rdečo in črnima točkama.
- (c) Graf $K_{1,2,4}$ vsebuje trikotnik, zato potrebujemo vsaj tri barve. Tri barve pa so dovolj po definiciji, saj točke iste barve (rdeče, črne, modre) med sabo niso povezane. Torej je barvnost grafa $K_{1,2,4}$ enaka 3.



4. Problem predstavimo kot problem iz teorije grafov takole. Sestavimo graf G . Točke grafa G so šahisti. Točki u in v sta sosednji, če šahista u in v odigrata partijo. Graf G ima 6 točk, 8 povezav in vse točke imajo stopnjo 2 ali 3. V grafu G iščemo število točk stopnje 2.

Označimo z n_2 število točk stopnje 2 in z n_3 število točk stopnje 3 v G . Lema o rokovanju nam da zvezo $2n_2 + 3n_3 = 2 \cdot 8$. Velja še $n_2 + n_3 = 6$. Od tod izračunamo $n_2 = 2$, $n_3 = 4$. Torej sta natanko dva šahista odigrala po dve partiji.

Vsi možni grafi s 6 točkami in 8 povezavami, pri katerih imajo vse točke stopnjo 2 ali 3, so prikazani na spodnji sliki. Uredimo jih glede na razdaljo med točkama stopnje 2, ki je lahko 1, 2 ali 3. Zadnja dva grafa sta neizomorfna, saj ima eden trikotnik, drugi pa ne.



Opomba. Lahko poiščemo tudi vse neizomorfne komplemente, ki imajo štiri točke stopnje 2 in dve točki stopnje 3.

1. izpit, 2. februar 2012

1. Dolžine ciklov lahko določimo na 4 načine: $7 = 1 + 1 + 5 = 1 + 2 + 4 = 1 + 3 + 3 = 2 + 2 + 3$. Za permutacijo prvega tipa najprej izberemo 5 elementov izmed 7 za cikel dolžine 5. Cikličnih permutacij 5 elementov pa je $4!$. Celotna permutacija je s tem enolično določena. Permutacij prvega tipa je torej $\binom{7}{5} \cdot 4!$. Podobno dobimo, da je permutacij drugega tipa $\binom{7}{4} \cdot 3! \cdot \binom{3}{2}$. Pri permutacijah tretjega in četrtega tipa izbiramo elemente za dva cikla iste dolžine, vrstni red teh ciklov pa ni pomemben,

zato je treba rezultat deliti še dva. Celotno število permutacij s tremi disjunktnimi cikli je torej enako

$$\binom{7}{5} \cdot 4! + \binom{7}{4} \cdot 3! \cdot \binom{3}{2} + \binom{7}{3} \binom{4}{3} \cdot 2! \cdot 2!/2 + \binom{7}{2} \binom{5}{2} \cdot 2!/2 = 1624.$$

2. Imamo 12 črk, pri tem pa A nastopi trikrat, E , N in P pa po dvakrat.

- (a) Od števila vseh načinov odštejemo število tistih, pri katerih P nastopi zaporedoma. PP štejemo kot eno enoto. Dobimo

$$\frac{12!}{3! 2! 2! 2!} - \frac{11!}{3! 2! 2!} = 8316000 \text{ načinov.}$$

- (b) Uporabimo pravilo vključitev in izključitev. Od števila vseh načinov odštejemo število tistih, pri katerih se P ali E pojavita po dvakrat in prištejemo število tistih, pri katerih se P in E oba pojavita po dvakrat. Dobimo

$$\frac{12!}{3! 2! 2! 2!} - 2 \cdot \frac{11!}{3! 2! 2!} + \frac{10!}{3! 2!} = 6955200 \text{ načinov.}$$

- (c) Spet od števila vseh načinov odštejemo število tistih, pri katerih A nastopi zaporedoma. Če AA štejemo za eno enoto, bomo AAA šteli dvakrat, kot AA, A in A, AA . Trije zaporedni A -ji se pojavijo na $\frac{10!}{2! 2! 2!}$ (AAA štejemo za eno enoto). Število ustreznih razporeditev je torej enako

$$\frac{12!}{3! 2! 2! 2!} - \left(\frac{11!}{2! 2! 2!} - \frac{10!}{2! 2! 2!} \right) = 5443200.$$

- (d) Uporabimo pravilo vključitev in izključitev. Pri tem upoštevamo, da je razporeditev črk

- z vsaj dvema zaporednima črkama A enako $\frac{11!}{2! 2! 2!} - \frac{10!}{2! 2! 2!}$,
- z dvema zaporednima črkama E , N ali P enako $\frac{11!}{3! 2! 2!}$,
- z vsaj dvema zaporednima A -jema in zaporednim E -jem, N -jem ali P -jem enako $\frac{10!}{2! 2!} - \frac{9!}{2! 2!}$,
- z dvakrat dvema zaporednima črkama E , N ali P enako $\frac{10!}{3! 2!}$,
- z vsaj dvema zaporednima A -jema in dvema zaporednima E -jem, N -jem ali P -jem enako $\frac{9!}{2!} - \frac{8!}{2!}$,
- z zaporednimi vsemi črkami E , N ali P enako $\frac{9!}{3! 2!}$,
- z vsemi štirimi črkami zaporedoma enako $8! - 7!$.

Po pravilu vključitev in izključitev dobimo

$$\begin{aligned} \frac{12!}{3! 2! 2! 2!} - \left(\left(\frac{11!}{2! 2! 2!} - \frac{10!}{2! 2! 2!} \right) + 3 \frac{11!}{3! 2! 2!} \right) + \left(3 \left(\frac{10!}{2! 2!} - \frac{9!}{2! 2!} \right) + 3 \frac{10!}{3! 2!} \right) - \\ - \left(3 \left(\frac{9!}{2!} - \frac{8!}{2!} \right) + 3 \frac{9!}{3! 2!} \right) + (8! - 7!) \end{aligned}$$

načinov.

3. (a) Pomembno je samo, koliko kovancev za dva centa uporabimo (znesek, ki ostane, plačamo s kovanci za en cent): uporabimo lahko najmanj 0 kovancev po dva centa in največ $\lfloor n/2 \rfloor$ kovancev za dva centa. Število načinov za plačilo zneska n centov je torej $\lfloor n/2 \rfloor + 1$.
- (b) Tu je pomemben še vrstni red izplačevanja. Naj bo a_n število načinov za izplačilov zneska n centov. Potem je

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 & (1) \\ a_2 &= 2 & (1 + 1, 2) \\ a_3 &= 3 & (1 + 1 + 1, 1 + 2, 2 + 1). \end{aligned}$$

Zadnji kovanec, ki ga izplačamo, je lahko za en cent ali pa za dva centa. V prvem primeru smo prej izplačali znesek $n - 1$, kar lahko storimo na a_{n-1} načinov. V drugem primeru smo prej izplačali znesek $n - 2$, kar lahko storimo na a_{n-2} načinov. Velja torej

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Karakteristični polinom enačbe $K(x) = x^2 - x - 1$ ima dve ničli $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ in $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Zato je splošna rešitev enačbe enaka

$$a_n = A \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + B \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Konstanti A in B izračunamo iz začetnih pogojev. Zaradi lažjega računanja lahko vzamemo $a_0 = 1$ (znesek 0 lahko izplačamo na 1 način; tako določen a_0 tudi ustreza rekurzivni zvezi).

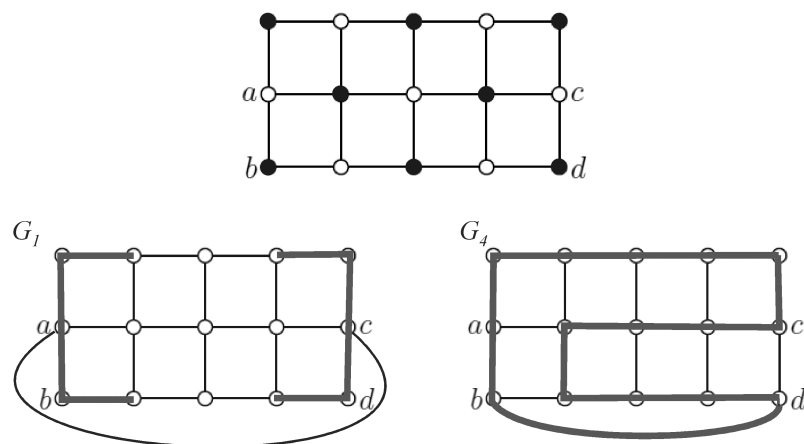
$$\begin{aligned} a_0 &= A + B = 1, \\ a_1 &= A(1 + \sqrt{5})/2 + B(1 - \sqrt{5})/2 = 1. \end{aligned}$$

Rešimo sistem dveh enačb z dvema neznankama in dobimo $A = (5 + \sqrt{5})/10$ in $B = (5 - \sqrt{5})/10$. Rešitev gornje rekurzivne enačbe je torej

$$a_n = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

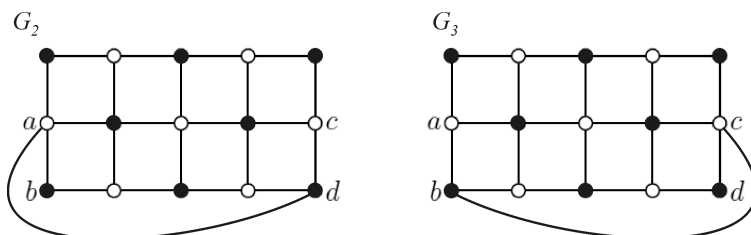
Opazimo lahko, da je zaporedje (a_n) Fibonaccijevo zaporedje.

4. (a) Graf G je dvodelen, saj ga lahko pravilno pobarvamo z dvema barvama, glej sliko spodaj. Graf G ni Hamiltonov, saj je dvodelen in ima liho število točk (število belih točk ni enako številu črnih točk; belih točk je 7, črnih pa 8).
- (b,c) Grafa G_2 in G_3 sta dvodelna na lihem številu točk, zato nista Hamiltonova. Graf G_4 ima Hamiltonov cikel, glej sliko spodaj. Graf G_1 ni Hamiltonov. Sklepamo takole. Če bi G_1 imel Hamiltonov cikel, bi le-ta vseboval vse povezave,



ki so sosednje točkam stopnje 2. Zato ne bi vseboval dodane povezave ac . Vendar pa je graf brez te povezave dvodelen na lihem številu točk, zato nima Hamiltonovega cikla.

Grafa G_2 in G_3 sta izomorfna: če graf G_3 prezrcalimo čez premico, na kateri leži povezava ab , dobimo isto risbo kot za G_2 , glej sliko spodaj. Izomorfizem grafov je preslikava, ki preslika točke G_2 v istoležne točke G_3 na prezrcaljeni risbi. Grafa G_2 in G_3 sta dvodelna, grafa G_1 in G_4 pa ne, zato G_2 in G_3 nista izomorfna grafoma G_1 in G_4 . Graf G_4 je Hamiltonov, graf G_1 pa ne, zato tudi G_1 in G_4 nista izomorfna.



2. izpit, 17. februar 2012

1. Vsota treh števil bo deljiva s 3, če imajo vsa isti ostanek pri deljenju s 3 ali pa ima eno ostanek pri deljenju s 3 enak 0, drugo 1 in tretje 2. Med števili od 1 do 100 jih ima 34 ostanek pri deljenju s 3 enak 1, 33 jih ima ostanek pri deljenju s 3 enak 2 in 33 jih ima ostanek pri deljenju s 3 enak 0. Tri števila lahko izberemo torej na

$$\binom{34}{3} + \binom{33}{3} + \binom{33}{3} + \binom{34}{1} \binom{33}{1} \binom{33}{1} = 53922$$

načinov.

2. (a) Posebej delimo jabolka, ki jih ne razlikujemo, in ostalih 5 sadežev, ki jih razlikujemo. Nalogo lahko rešimo s pomočjo porazdelitev. Celice so ljudje (3), jih

razlikujemo, elementi pa so v prvem primeru jabolka (6), ki jih ne razlikujemo, v drugem primeru pa ostali sadeži (5), ki jih razlikujemo. Sadeže lahko torej razdelimo na

$$\binom{6+3-1}{6} \cdot 3^5 = 6804$$

načinov.

- (b) Nalogo rešimo s pomočjo pravila vključitev in izključitev. Definirajmo množice A_i kot množice razdelitev, kjer oseba i ne dobi nič; torej delimo samo dvema osebama. Potem je

$$|A_i| = \binom{6+2-1}{6} \cdot 2^5 = 7 \cdot 32 = 224.$$

Za $i \neq j$ velja $|A_i \cap A_j| = 1$, saj vse dobi ena oseba. Ker vse razdelimo, velja tudi $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$. Po pravilu vključitev in izključitev dobimo

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= \\ &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 + A_2 + A_3| \\ &= 3 \cdot 224 - 3 = 669. \end{aligned}$$

Sedaj še od števila vseh možnih razdelitev odštejemo število tistih, pri katerih vsaj eden ne dobi nič. Dobimo $6804 - 669 = 6135$ možnosti.

3. Označimo z $A(x)$ rodovno funkcijo zaporedja (a_n) . Iz rekurzivne enačbe dobimo rodovno funkcijo na naslednji način: rekurzivno enačbo pomnožimo z x^{n+1} in sestavimo formalne vsote členov za $n \geq 0$. Dobimo

$$\sum_{n \geq 0} a_{n+1} x^{n+1} - 2 \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+1} = \sum_{n \geq 0} 2^{n+1} x^{n+1}.$$

Prva vsota je enaka $A(x) - a_0$, druga vsota je enaka $2xA(x)$, tretja vsota pa je enaka $2x/(1-2x)$. Dobimo linearno enačbo za $A(x)$

$$A(x)(1-2x) = \frac{2x}{1-2x} + 2 = \frac{2-2x}{1-2x}$$

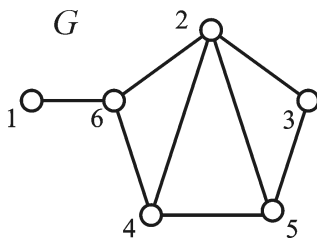
in izračunamo $A(x) = (2-2x)(1-2x)^{-2}$. S pomočjo binomskega izreka za negativne eksponente zapišemo $A(x)$ v obliki formalne potenčne vrste

$$\begin{aligned} A(x) &= (2-2x) \sum_{n \geq 0} \binom{2+n-1}{n} (2x)^n \\ &= (2-2x) \sum_{n \geq 0} (n+1)(2x)^n \\ &= 2 \sum_{n \geq 0} (n+1)(2x)^n - 2x \sum_{n \geq 0} (n+1)(2x)^n. \end{aligned}$$

Od tod izračunamo $a_n = 2(n+1) \cdot 2^n - 2n \cdot 2^{n-1} = (n+2) \cdot 2^n$.

4. Problem predstavimo kot problem iz teorije grafov takole. Sestavimo graf $G = (V, E)$. Točke grafa G so možna števila pik na domini; $V = \{0, 1, \dots, 6\}$. Točki u in v sta sosednji, če imamo domino, ki ima na eni strani u pik, na drugi strani pa v pik. Iščemo Eulerjev sprehod oziroma Eulerjev obhod v grafu G .

Graf G je narisano na spodnji sliki. Ker ima 4 točke lihe stopnje, nima niti Eulerjevega sprehoda, niti Eulerjevega obhoda. Torej je odgovor na obe vprašanji NE. Iz slike vidimo, da je graf G ravninski, saj je narisano tako, da se noben par povezav ne seka.



3. izpit, 5. september 2012

1. Škatlo, v kateri bo 16 predmetov, izberemo na 3 načine, predmete, ki jih damo v to škatlo pa na $\binom{24}{16}$ načinov. Ostane še 8 predmetov, ki jih razdelimo v dve škatli: za vsakega od njih se na dva načina odločimo, v katero od škatel ga damo. Dobimo

$$3 \cdot \binom{24}{16} \cdot 2^8 = 564841728$$

načinov. Če so škatle enake, na $\binom{24}{16}$ načinov izberemo predmete za škatlo, v kateri bo 16 predmetov. Za drugi del naloge lahko uporabimo porazdelitve. Celici sta škatli (2), ki ju ne razlikujemo, ena od celic je lahko prazna, elementi pa so predmeti (8), ki jih razlikujemo. Dobimo $S(8, 1) + S(8, 2) = 1 + 127 = 128$ načinov. Še enostavneje je, če število razdelitev osmih predmetov v dve škatli, kjer škatli razlikujemo, delimo z 2 (številom vrstnih redov dveh škatel). Skupaj dobimo

$$\binom{24}{16} \cdot 128 = 94140288$$

načinov.

2. Uporabimo pravilo vključitev in izključitev. Najlažje je, če delamo z matrikami, ki nimajo nobenega ničelnega stolpca, in preštejemo tiste med njimi, ki nimajo nobene ničelne vrstice.

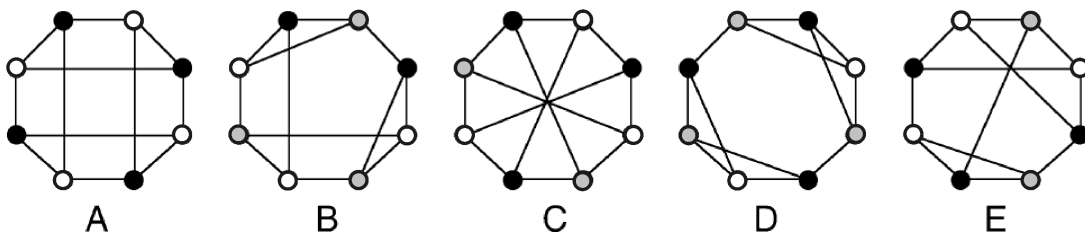
Neničelnih stolpcev dolžine 3 je $10^3 - 1 = 999$, matrik, ki nimajo nobenega ničelnega stolpca je po potem pravilu produkta enako $999^3 = 997002999$. Označimo z A_i množico matrik, ki imajo ničelno i -to vrstico za $i = 1, 2, 3$. Pri takšnih matrikah je

v vsakem stolpcu treba določiti samo še dva elementa. Zato velja $|A_i| = (10^2 - 1)^3 = 970299$. Matrik z dvema ničelnima vrsticama $i \neq j$ pa je $|A_i \cap A_j| = (10 - 1)^3 = 729$. Vse tri vrstice ne morejo biti ničelne, zato je $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$. Od števila vseh matrik s samimi neničelnimi stolpci sedaj odštejemo število tistih matrik, ki imajo vsaj eno ničelno vrstico. Po pravilu vključitev in izključitev dobimo

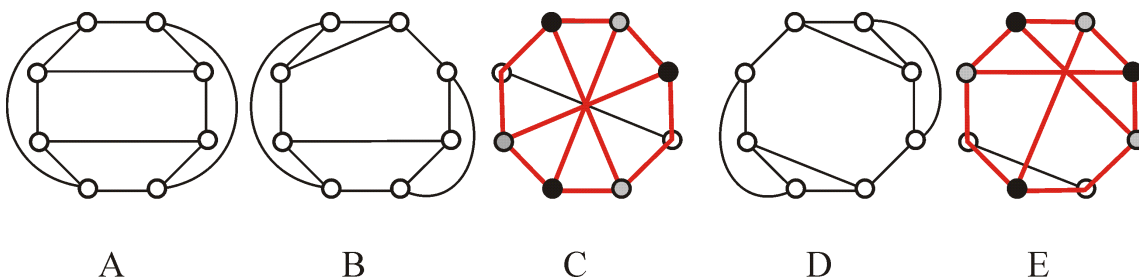
$$997002999 - \binom{3}{1} \cdot 970299 + \binom{3}{2} \cdot 729 - 0 = 994094289$$

matrik, ki imajo same neničelne vrstice in same neničelne stolpce.

3. Graf A je dvodelen, zato je njegova barvnost enaka 2. Vsi ostali grafi vsebujejo cikel lihe dolžine, zato je njihova barvnost vsaj 3. Ker vse lahko pravilno pobarvamo s tremi barvami (glej sliko spodaj), je njihova barvnost enaka 3.



Grafi A , B in D so ravninski, saj jih lahko narišemo v ravnino tako, da se noben par povezav ne seka, glej sliko spodaj. Grafa C in E nista ravninska, saj vsebujeta podgraf, skrčljiv na $K_{3,3}$, na sliki spodaj prikazan z rdeče pobarvanimi povezavami.



Graf A ni izomorfen nobenemu od ostalih grafov, saj je edini dvodelen. Grafa B in D nista izomorfna, saj ima graf B dva cikla dolžine 3, graf D pa štiri cikle dolžine 3. Grafa B in D sta ravninska, zato nobeden od njiju tudi ni izomorfen grafoma C ali E , ki nista ravninska. Tudi grafa C in E nista izomorfna, saj ima graf E cikel dolžine 3, graf C pa ne.

4. (a) V Petersenovem grafu so vsa vozlišča enakovredna, zato je dovolj, da najdemo Hamiltonov cikel za $G - v$ za poljubno točko v , kar ni težko.
- (b) Dokazujemo s protislovjem. Recimo, da je G hipo-Hamiltonov graf in v vozlišče stopnje vsaj $(n - 1)/2 + 1$. Naj bo $C = v_0 v_1 \dots v_{n-1} v_1$ Hamiltonov cikel v $G - v$. Ker ima v vsaj $(n - 1)/2 + 1$ sosedov, sta vsaj dva od njih zaporedna

na C ; brez škode za splošnost lahko vzamemo, da sta to v_{n-1} in v_1 (sicer lahko točke preimenujemo). Potem pa je $v_0v_1 \dots v_{n-1}v_nv_1$ Hamiltonov cikel v G . Protislovje.

1. kolokvij, 5. december 2012

1. (a) Izmed desetih parov izberemo pet parov na $\binom{10}{5}$ načinov, pri vsakem paru pa sta še dve možnosti, koga izbrati. Skupaj torej lahko izberemo 5 parov na

$$\binom{10}{5} \cdot 2^5 = 8064$$

načinov. Alternativno: najprej izberemo enega izmed 20 ljudi, nato enega izmed 18 (partnerja ne izberemo), in tako naprej, na koncu delimo še z vsemi možnimi vrstnimi redi izbire, ker vrstni red izbire ni pomemben. Načinov je torej

$$\frac{20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12}{5!} = 8064.$$

- (b,c) Izkaže se, da sta pri teh podatkih nalogi enaki. Da izberemo 5 ljudi, od tega točno dva para, izmed 10 parov izberemo dva, izmed preostalih 16 ljudi izberemo pa enega. To storimo na

$$\binom{10}{2} \cdot 16 = 720$$

načinov.

2. Pri štetju si lahko pomagamo s porazdelitvami. Elementi so sladkarije ene vrste, neoznačeni. Celice so otroci, označeni. Pri prvem vprašanju so celice lahko prazne. Zmnožimo število načinov za razdelitev čokolad, piškotov in bonbonov in dobimo:

$$\binom{4+6-1}{6} \binom{4+5-1}{5} \binom{4+3-1}{3} = \binom{9}{6} \binom{8}{5} \binom{6}{3} = 84 \cdot 56 \cdot 20 = 94080.$$

Pri drugem vprašanju je zahtevano, da vsak otrok dobi vsaj eno sladkarijo, torej vsaj eno čokolado ali piškot ali bonbon. Od števila vseh možnosti odštejemo število tistih, pri katerih kakšen od otrok ne dobi nič.

Pomagamo si s pravilom vključitev in izključitev. Naj bo A_i , $i = 1, 2, 3, 4$, množica razdelitev, pri katerih otrok i ne dobi nič. Delimo torej med tri otroke, zato

$$|A_i| = \binom{3+6-1}{6} \binom{3+5-1}{5} \binom{3+3-1}{3} = \binom{8}{6} \binom{7}{5} \binom{5}{3} = 28 \cdot 21 \cdot 10 = 5880.$$

Če po dva otroke ne dobita nič, delimo samo dvema otrokoma. Zato je za $i \neq j$

$$|A_i \cap A_j| = \binom{2+6-1}{6} \binom{2+5-1}{5} \binom{2+3-1}{3} = \binom{7}{6} \binom{6}{5} \binom{4}{3} = 7 \cdot 6 \cdot 4 = 168.$$

Če po trije otroci ne dobijo nič, četrti otrok dobi vse. Trojni preseki množic A_i imajo torej moč 1, četvorni preseki pa so prazni, saj nekdo mora dobiti sladkarije, če vse razdelimo. Po pravilu vključitev in izključitev dobimo

$$94080 - \binom{4}{1} \cdot 5880 + \binom{4}{2} \cdot 168 - \binom{4}{3} \cdot 1 = 71564$$

možnih razdelitev.

3. Nalogo lahko rešujemo s pomočjo porazdelitev. Predmeti (8) so elementi, označeni (jih razlikujemo), dnevi (5) so celice, označene.

(a) Pri tej nalogi so celice neprazne. Razdelitev je torej

$$5! S(8, 5) = 120 \cdot 1050 = 126000.$$

(b) Od števila vseh možnosti odštejemo število tistih, pri katerih je na urniku vsak dan vsaj en predmet. Dobimo:

$$5^8 - 126000 = 390625 - 126000 = 264625.$$

(c) Najhitreje nalogo rešimo, če upoštevamo, da je razdelitev, pri katerih je v petek manj predmetov kot v torek, enako, kot razdelitev, pri katerih je v torek manj predmetov kot v petek. Od števila vseh razdelitev je torej treba odšteti število tistih, pri katerih je predmetov v torek in v petek enako, in deliti z dva.

Možnosti, pri katerih je v petek in v torek enako predmetov, je

$$3^8 + 8 \cdot 7 \cdot 3^6 + \binom{8}{2} \binom{6}{2} \cdot 3^4 + \binom{8}{3} \binom{5}{3} \cdot 3^2 + \binom{8}{4} = 86515.$$

Po vrsti smo sešteli, ko je v torek in petek po 0,1,2,3 ali 4 predmetov. Dobimo torej

$$\frac{5^8 - 86515}{2} = 152055$$

razdelitev.

Nalogo je možno rešiti tudi z naštevanjem vseh možnosti, pri katerih je v petek manj predmetov kot v torek (0:1-8, 1:2-7, ..., 3:4-5), vendar je možnosti zelo veliko, in jih je težko pravilno sešteti.

4. Najmanjša izmed vsot po treh elementov med 2 in 500 je $12 = 2 + 4 + 6$, največja pa $1494 = 496 + 498 + 500$. Možnih vsot je torej $(1494 - 12)/2 + 1 = 742$.

Podmnožic moči 3 množice z 18 elementi je $\binom{18}{3} = 816$.

Ker je podmnožic moči 3 več kot možnih vsot, imata po Dirichletovem načelu vsaj dve podmnožici isto vsoto elementov.

(Elementi so podmnožice, celice so možne vsote).

2. kolokvij, 24. januar 2013

1. Razvijmo $(1 - x)^{-6}$ po binomskem izreku za negativne koeficiente:

$$(1 - x)^{-6} = \sum_{i \geq 0} \binom{6 + i - 1}{i} x^i = \sum_{i \geq 0} \binom{5 + i}{i} x^i.$$

Člen, kjer nastopa x^{15} pri $f(x)$, dobimo tako, da x pomnožimo s členom pri $i = 14$ v gornji vsoti in $2x^3$ pomnožimo s členom pri $i = 12$ v gornji vsoti ter ju seštejemo. Koeficient pri x^{15} je torej enak

$$\binom{5 + 14}{14} + 2 \binom{5 + 12}{12} = 11628 + 2 \cdot 6188 = 24004.$$

Pri $g(x)$ najprej razvijmo števec po binomskem izreku:

$$(1 + 2x)^4 = (2x + 1)^4 = \sum_{i=0}^4 \binom{4}{i} (2x)^i = 1 + 4 \cdot 2x + 6 \cdot 4x^2 + 4 \cdot 8x^3 + 16x^4.$$

Člen, kjer nastopa x^{15} pri $g(x)$, dobimo tako, da člen pri x^i v vrsti za $(1 + 2x)^4$ pomnožimo s členom pri x^{15-i} v vrsti za $(1 - x)^{-6}$ za $i = 0, \dots, 4$, ter jih seštejemo. Koeficient pri x^{15} je torej enak

$$\begin{aligned} \binom{5 + 15}{15} + 4 \cdot 2 \cdot \binom{5 + 14}{14} + 6 \cdot 4 \cdot \binom{5 + 13}{13} + 4 \cdot 8 \cdot \binom{5 + 12}{12} + 16 \cdot \binom{5 + 11}{11} = \\ = \binom{20}{5} + 8 \cdot \binom{19}{5} + 24 \cdot \binom{18}{5} + 32 \cdot \binom{17}{5} + 16 \cdot \binom{16}{5} = 582064. \end{aligned}$$

2. Na voljo imamo sedem števk, od tega tri sode in štiri lihe. Za 1-mestno številko lahko uporabimo katerokoli od sedmih števk, torej je $a_1 = 7$. Dvomestnih števil je $7 \cdot 7 = 49$, vendar je $9 = 3 \cdot 3$ takšnih, ki vsebujejo dve zaporedni sodi števki. Torej je $a_2 = 49 - 9 = 40$. Za izračun števila 3-mestnih števil lahko na primer številke razdelimo v dve množici: tiste pri katerih je na drugem mestu liha števka, in tiste, pri katerih je na drugem mestu soda števka. V prvem primeru je lahko na prvem ali tretjem mestu katerakoli števka, dobimo $7 \cdot 4 \cdot 7 = 196$ števil. V drugem primeru morata biti na prvem in tretjem mestu lihi števki. Dobimo $4 \cdot 3 \cdot 4 = 48$ števil. Torej je $a_3 = 196 + 48 = 244$.

Pri n -mestnih številkah ločimo dve možnosti: zadnja števka je lahko liha ali pa soda. V prvem primeru imamo $a_{n-1} \cdot 4$ možnosti, saj lahko z liho števko nadaljujemo katerokoli zaporedje dolžine $n - 1$, v katerem ne nastopata dve zaporedni sodi števki. V drugem primeru mora biti predzadnja števka soda in ustreznih zaporedij je $a_{n-2} \cdot 4 \cdot 3$. Zaporedje (a_n) torej ustreza rekurzivni enačbi

$$a_n = 4a_{n-1} + 12a_{n-2}$$

z začetnimi pogoji $a_1 = 7$ in $a_2 = 40$. Iz rekurzivne zveze lahko izračunamo tudi $a_0 = (a_2 - 4a_1)/12 = 1$.

Rekurzivno enačbo rešimo po standardnem postopku. Karakteristični polinom enačbe $K(x) = x^2 - 4x + 12$ ima ničli $x_1 = 6$ in $x_2 = -2$. Zato je splošna rešitev homogene enačbe enaka

$$a_n = A \cdot 6^n + B \cdot (-2)^n.$$

Konstanti A in B izračunamo iz začetnih pogojev:

$$\begin{aligned} a_0 &= A + B = 1, \\ a_1 &= A \cdot 6 + B \cdot (-2) = 7. \end{aligned}$$

Dobimo $A = 9/8$ in $B = -1/8$. Rešitev gornje rekurzivne enačbe je torej enaka

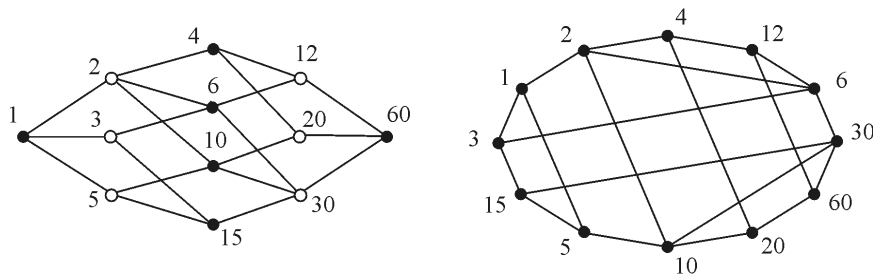
$$a_n = \frac{9}{8} \cdot 6^n - \frac{1}{8} \cdot (-2)^n.$$

3. Množica vozlišč grafa G_{60} je enaka množici deliteljev števila 60,

$$M_{60} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\},$$

točki x in y pa sta povezani, kadar obstaja praštevilo p , da velja $x = py$ ali $y = px$.

- (a) Graf G_{60} je narisani na spodnji sliki.
- (b) Točke grafa G_{60} lahko pravilno pobarvamo z dvema barvama, glej sliko spodaj levo, zato je dvodelen in je $\chi(G_{60}) = 2$.
- (c) Graf G_{60} ima Hamiltonov cikel, glej sliko na desni.
- (d) Graf G_{60} je ravninski. Če desno sliko spremenimo tako, da povezave $(1 : 5)$, $(2 : 10)$, $(4 : 20)$ in $(12 : 60)$ narišemo v zunanosti Hamiltonovega cikla, se povezave ne sekajo.

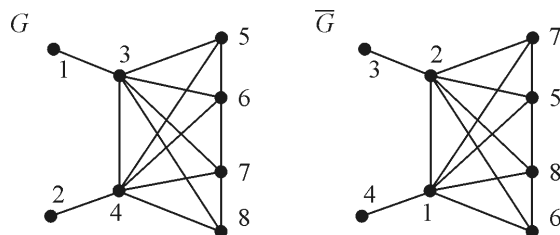


4. Recimo, da tak graf G obstaja. Najprej razmislimo, koliko ima povezav in kakšne so stopnje njegovih točk. Poln graf na osmih točkah ima $8 \cdot 7/2 = 28$ povezav. Graf, ki je izomorfen svojemu komplementu, ima natanko polovico vseh možnih povezav. Graf G ima torej 14 povezav.

Ker ima natanko dve točki stopnje 6, ima tudi natanko dve točki stopnje ena, saj velja $\deg_{\bar{G}}(v) = 7 - \deg_G(v)$. Po lemi o rokovanju je vsota stopenj točk enaka dvakratnemu številu povezav. Stopnje preostalih štirih točk se torej seštevajo v 14.

Imamo tri možnosti za stopnje (upoštevamo, da imamo za vsako točko stopnje k tudi točko stopnje $7 - k$): $(4, 4, 3, 3)$, $(5, 4, 3, 2)$ in $(5, 5, 2, 2)$. Drugi dve možnosti ne prideta v poštev, saj imamo premalo točk dovolj velikih stopenj, s katerimi bi lahko povezali točke stopenj 6 in 5.

Ostane torej ena sama možnost za stopnje točk, to je $(6, 6, 4, 4, 3, 3, 1, 1)$. Izkaže se, da je tak graf do izomorfizma enolično določen in je izomorfen svojemu komplementu. Graf G in njegov komplement sta narisana na spodnji sliki. Izomorfizem preslika istoležne točke v istoležne točke: $1 \mapsto 3$, $2 \mapsto 4$, $3 \mapsto 2$, $4 \mapsto 1$, $5 \mapsto 7$, $6 \mapsto 5$, $7 \mapsto 8$ in $8 \mapsto 6$. Očitno se tudi povezave preslikajo v povezave, saj sta grafa enako narisana.



1. izpit, 1. februar 2013

1. (a) Za najmlajšega otroka lahko izberemo tri igrače izmed devetih, nato za drugega otroka izberemo dve igrači izmed preostalih šestih, za tretjega dve igrači izmed preostalih štirih, četrti otrok pa dobi zadnji dve igrači. Igrače lahko razdelimo med otroke na

$$\binom{9}{3} \binom{6}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{2} = 84 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1 = 7560$$

načinov.

- (b) Nalogo lahko rešimo s pomočjo porazdelitev: devet označenih elementov (igrač) porazdelimo v štiri označene celice (otroke) in celice ne smejo biti prazne. To lahko naredimo na $4! S(9, 4) = 24 \cdot 7770 = 186480$ načinov.
- (c) Nalogo rešimo s pomočjo pravila vključitev in izključitev. Vseh možnih razdelitev igrač je $4^9 = 262144$. Od števila vseh razdelitev odštejemo število tistih, kjer vsaj en otrok dobi najmanj pet igrač.

Definirajmo torej množico A_i , $i = 1, \dots, 4$, kot množico razdelitev, pri katerih otrok i dobi vsaj pet igrač. Moč množice A_i izračunamo tako, da preštejemo disjunktne možnosti, ko otrok i dobi 5, 6, 7, 8 ali 9 igrač, ostali trije pa skupaj 4, 3, 2, 1 oziroma 0 igrač. Velja torej

$$|A_i| = \binom{9}{5} \cdot 3^4 + \binom{9}{6} \cdot 3^3 + \binom{9}{7} \cdot 3^2 + \binom{9}{8} \cdot 3^1 + \binom{9}{9} \cdot 3^0 = 12826.$$

Ker ne moreta dva otroka hkrati dobiti vsaj pet igrac, je $A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$. Skupaj je torej

$$262144 - 4 \cdot 12826 = 210840$$

načinov za razdelitev igrac.

- Uporabimo Dirichletovo načelo. Elementi so elementi množice S ; imamo $n + 1$ elementov. Škatle so števila $1, \dots, n$; imamo n škatel. V škatlo i damo elementa i in $2n + 1 - i$ za $i = 1, \dots, n$. Ker je škatel manj kot elementov, sta vsaj v eni škatli, na primer škatli i , vsaj dva elementa – dve različni števili iz množice S . Njuna vsota pa je enaka $i + (2n + 1 - i) = 2n + 1$.
- Na šahovnico velikosti 2×1 lahko postavimo samo eno ploščico velikosti 2×1 . Ker imamo štiri možnosti za barvo ploščice, je $a_1 = 4$.

Na šahovnico velikosti 2×2 lahko postavimo samo eno ploščico velikosti 2×2 (na 5 načinov, ker je pet barv) ali dve ploščici velikosti 2×1 , ki lahko ležita vodoravno ali navpično; za vsako so spet štiri možnosti. Velja torej $a_2 = 5 + 2 \cdot 4 \cdot 4 = 37$.

Na šahovnico velikosti 2×3 lahko postavimo eno večjo in eno manjšo ploščico na $5 \cdot 4 \cdot 2$ načinov, saj je lahko manjša ploščica pred večjo ali za večjo ploščico. Postavimo lahko tri manjše ploščice navpično na $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ načinov, ali dve ploščici vodoravno in eno navpično na $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2$ načinov, saj je lahko navpično postavljena ploščica pred ali za vodoravnima ploščicama. Dobimo $a_3 = 40 + 3 \cdot 64 = 232$.

Pri šahovnicah velikosti $2 \times n$ ločimo tri možnosti:

- na koncu je navpična ploščica velikosti 2×1 ($4a_{n-1}$ načinov),
- na koncu sta dve vodoravni ploščici velikosti 2×1 ($4 \cdot 4 \cdot a_{n-2}$ načinov),
- na koncu je ena ploščica velikosti 2×2 ($5a_{n-2}$ načinov).

Zaporedje (a_n) torej ustreza rekurzivni enačbi

$$a_n = 4a_{n-1} + 21a_{n-2}$$

z začetnimi pogoji $a_1 = 4$ in $a_2 = 37$.

Rekurzivno enačbo rešimo po standardnem postopku. Karakteristični polinom enačbe $K(x) = x^2 - 4x + 21$ ima ničli $x_1 = 7$ in $x_2 = -3$. Zato je splošna rešitev homogene enačbe enaka

$$a_n = A \cdot 7^n + B \cdot (-3)^n.$$

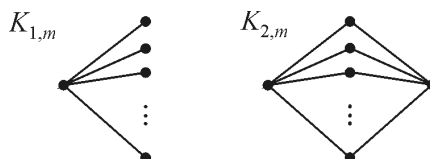
Konstanti A in B izračunamo iz začetnih pogojev:

$$\begin{aligned} a_1 &= A \cdot 7 + B \cdot (-3) = 4, \\ a_2 &= A \cdot 7^2 + B \cdot (-3)^2 = 37. \end{aligned}$$

Dobimo $A = 7/10$ in $B = 3/10$. Rešitev gornje rekurzivne enačbe je torej enaka

$$a_n = \frac{7}{10} \cdot 7^n + \frac{3}{10} \cdot (-3)^n.$$

4. (a) Povezan graf je Eulerjev natanko tedaj, ko imajo vse njegove točke sodo stopnjo. Stopnje točk v grafu $K_{m,n}$ so enake m ali n . Da bo graf $K_{m,n}$ Eulerjev, morata biti m in n oba sodi števili.
- (b) Če je $n \geq 3$ (in zato tudi $m \geq 3$), graf $K_{m,n}$ vsebuje kot podgraf graf $K_{3,3}$ in zato ni ravninski. Za $n = 1$ ali $n = 2$ pa je $K_{m,n}$ ravninski, saj takšen graf lahko narišemo v ravnino tako, da se njegove povezave ne sekajo, glej sliko spodaj.



- (c) Graf $K_{m,n}$ je Hamiltonov natanko tedaj, ko velja $n = m \geq 2$. V tem primeru enostavno najdemo Hamiltonov cikel. Uporabimo lahko tudi Diracov izrek, saj je minimalna stopnja enaka polovici števila vozlišč.

Graf K_2 pa ni Hamiltonov in dvodelen graf, pri katerem množici v dvodelnem razbitju nimata iste moči, tudi ne more biti Hamiltonov.

2. izpit, 14. februar 2013

1. Študent lahko reši štiri, pet ali šest izmed prvih šestih nalog.
- Če reši štiri naloge, lahko reši še tri ali štiri izmed nalog 7 – 10.
 - Če reši pet nalog, lahko reši še dve, tri ali štiri izmed nalog 7 – 10.
 - Če reši šest nalog, lahko reši še eno, dve, tri ali štiri izmed nalog 7 – 10.

Izpit lahko torej opravi na

$$\binom{6}{4} \left(\binom{4}{3} + \binom{4}{4} \right) + \binom{6}{5} \left(\binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} \right) + \binom{6}{6} \left(\binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} \right) = 156$$

načinov.

2. (a) Uporabimo porazdelitve: 24 neoznačenih elementov damo v 10 označenih celic, celice ne smejo biti prazne. To lahko storimo na

$$\binom{24-1}{10-1} = \binom{23}{9} = 817190$$

načinov.

- (b) Od števila vseh možnosti odštejemo število tistih, pri katerih Janezek da vsaj 5 EUR. Teh možnosti je

$$\binom{20-1}{10-1} = \binom{19}{9} = 92378.$$

Sklepamo takole. Janezek takoj da 4 EUR, potem pa je treba plačati še 20 EUR. Dobimo torej $817190 - 92378 = 724812$ možnosti.

- (c) Nalogo rešimo s pomočjo pravila vključitev in izključitev. Definiramo množice A_i kot množice plačil, kjer otrok i da vsaj 5 EUR. Kot v točki (b) izračunamo $|A_i| = 92378$. Definiramo še množice B_i kot množice plačil, kjer odrasli i da vsaj 8 EUR. Podobno kot prej izračunamo

$$|B_i| = \binom{17-1}{10-1} = \binom{19}{6} = 11440.$$

Imamo tri vrste presekov dveh množic:

- $|A_i \cap A_j| = \binom{16-1}{10-1} = \binom{15}{9} = 5005$ za $i \neq j$. Najprej dva otroka plačata vsak po 4 EUR, nato je treba zbrati še 16 EUR, od vsakega od desetih ljudi vsaj po 1 EUR.
- $|B_i \cap B_j| = \binom{10-1}{10-1} = 1$ za $i \neq j$. Najprej dva odrasla plačata vsak po 7 EUR, nato je treba pobrati še od vsakega od desetih ljudi po 1 EUR.
- $|A_i \cap B_j| = \binom{13-1}{10-1} = \binom{12}{9} = 220$. Najprej en odrasel plača 7 EUR in en otrok plača 4 EUR, nato je treba zbrati še 13 EUR, od vsakega od desetih ljudi vsaj po 1 EUR.

Samo ene vrste presek treh množic je neprazen:

$$A_i \cap A_j \cap A_k = \binom{12-1}{10-1} = \binom{11}{9} = 55,$$

kjer so i, j, k različni. Ostali preseki so prazni. Po pravilu vključitev in izključitev dobimo

$$\binom{23}{9} - 4 \cdot |A_1| - 6 \cdot |B_1| + \binom{4}{2} |A_1 \cap A_2| + \binom{6}{2} |B_1 \cap B_2| + 4 \cdot 6 \cdot |A_1 \cap B_1| - \binom{4}{3} |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

načinov za izplačilo 24 EUR. To je 414143 načinov.

3. Označimo z $A(x)$ rodovno funkcijo zaporedja (a_n) . Iz rekurzivne enačbe dobimo rodovno funkcijo na naslednji način: rekurzivno enačbo pomnožimo z x^n in sestavimo formalne vsote členov za $n \geq 1$. Dobimo

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n - 3 \sum_{n \geq 1} a_{n-1} x^n = 5 \cdot \sum_{n \geq 1} 3^{n+1} x^n.$$

Prva vsota je enaka $A(x) - a_0$, druga vsota je enaka $xA(x)$, tretja vsota pa je enaka $9x/(1-3x)$. Dobimo linerno enačbo za $A(x)$

$$A(x)(1-3x) = 2 + \frac{45x}{1-3x} + 2 = \frac{39x+2}{1-3x}$$

in izrazimo $A(x) = (39x + 2)/(1 - 3x)^2$. S pomočjo binomskega izreka za negativne eksponente zapišemo $A(x)$ v obliki formalne potenčne vrste

$$\begin{aligned} A(x) &= (39x + 2) \sum_{n \geq 0} \binom{2 + n - 1}{n} (3x)^n \\ &= (39x + 2) \sum_{n \geq 0} (n + 1)(3x)^n \\ &= 39x \sum_{n \geq 0} (n + 1)(3x)^n + 2 \sum_{n \geq 0} (n + 1)(3x)^n. \end{aligned}$$

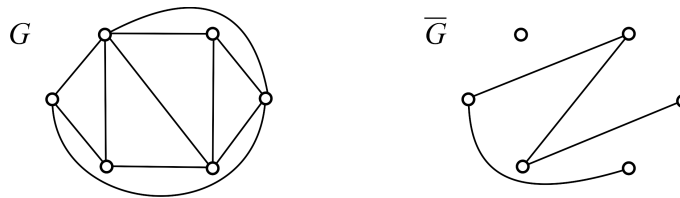
Koeficient pri x^n je enak $n \cdot 39 \cdot 3^{n-1} + (n + 1) \cdot 2 \cdot 3^n$. Od tod dobimo $a_n = (15n + 2) \cdot 3^n$.

4. Grafa G in $\overline{G}$ imata skupaj $\binom{6}{2} = 15$ povezav.

- (a) Poskrbimo, da bosta grafa G in $\overline{G}$ oba imela trikotnik in tako ne bosta dvodelna. Primera takšnih grafov G in $\overline{G}$ sta na spodnji sliki.



- (b) Pokažimo, da tak graf ne obstaja. Naj bo G dvodelen graf in $A, B \subseteq V(G)$ dvodelno razbitje grafa (torej velja $A \cup B = V(G)$, $A \cap B = \emptyset$ in vsaka povezava grafa G ima eno krajišče v A in drugo v B). Vsaj ena od množic A, B vsebuje vsaj tri vozlišča. Med temi vozlišči v G ni povezav, zato pa so v komplementu vsa povezana med sabo in $\overline{G}$ vsebuje trikotnik. Torej $\overline{G}$ ni dvodelen.
- (c) Za G vzamemo ravninski graf s čim več povezavami. Za $\overline{G}$ bo potem ostalo malo povezav in bo tudi ravninski. Primera takšnih grafov G in $\overline{G}$ sta na spodnji sliki.



- (d) Tak graf G ne obstaja. Graf z najmanjšim številom povezav, ki ni ravninski, vsebuje 9 povezav; to je $K_{3,3}$. Grafa G in $\overline{G}$ imata skupaj le 15 povezav, potrebovali pa bi vsaj 18 povezav.
- (e) Tak graf obstaja. Za G lahko vzamemo pot na šestih vozliščih. Ni se težko prepričati, da je tudi $\overline{G}$ povezan.

3. izpit, 27. avgust 2013

1. Podgrafi grafa K_6 , izomorfni ciklom, imajo lahko 3, 4, 5 ali 6 točk. Cikel dolžine k v K_6 najdemo takole: izberemo k vozlišč izmed 6, nato pa določimo vrstni red vozlišč na $(k-1)!/2$ načinov, saj smer obhoda v ciklu ni pomembna. Vseh ciklov v K_6 je torej

$$\binom{6}{3} \cdot \frac{(3-1)!}{2} + \binom{6}{4} \cdot \frac{(4-1)!}{2} + \binom{6}{5} \cdot \frac{(5-1)!}{2} + \binom{6}{6} \cdot \frac{(6-1)!}{2} = 197.$$

2. Nalogo rešimo s pomočjo pravila vključitev in izključitev. Definirajmo tri množice:

- množico A , ki vsebuje vse nize dolžine 5, ki ne vsebujejo "A",
- množico O , ki vsebuje vse nize dolžine 5, ki ne vsebujejo "O",
- množico R , ki vsebuje vse nize dolžine 5, ki ne vsebujejo "R".

Iščemo moč množice $(A \cup O \cup R)^C$. Velja $|A| = |O| = |R| = 24^5$, to so števila vseh nizov dolžine 5 iz 24 črk. Preseki vsebujejo vse nize dolžine 5 iz 23 črk oziroma 22 črk, zato je $|A \cap O| = |A \cap R| = |O \cap R| = 23^5$ in $|A \cap O \cap R| = 22^5$. Vseh nizov, ki ne vsebujejo črk A, O, R je torej

$$25^5 - 3 \cdot 24^5 + 3 \cdot 23^5 - 22^5 = 33150.$$

3. Imamo en niz dolžine 1 (0), dva niza dolžine 2 (00 in 01) in pet nizov dolžine 3 (000, 001, 010, 011 in 111), zato je $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ in $a_3 = 5$.

Niz dolžine $n \geq 3$ se lahko konča na enega od štirih načinov:

- z 0; takšnih nizov je a_{n-1} ,
- z 01; takšnih nizov je a_{n-2} ,
- z 011; takšnih nizov je a_{n-3} ali
- z 111; takšnih nizov je a_{n-3} .

Ker vsak niz, sestavljen iz 0, 01, 011 in 111, lahko sestavimo na en sam način, zaporedje (a_n) ustreza rekurzivni enačbi

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2a_{n-3}$$

z začetnimi pogoji $a_1 = 1$ in $a_2 = 2$ in $a_3 = 5$. Iz rekurzivne zveze lahko izračunamo tudi $a_0 = (a_3 - a_2 - a_1)/2 = 1$.

Rekurzivno enačbo rešimo po standardnem postopku. Karakteristični polinom enačbe $K(x) = x^3 - x^2 - x - 2 = (x^2 + x + 1)(x - 2)$ ima ničle $x_1 = 2$, $x_2 = (-1 + i\sqrt{3})/2$ in $x_3 = (-1 - i\sqrt{3})/2$. V polarnem zapisu je $x_2 = \cos(2\pi/3) + i \cdot \sin(2\pi/3)$. Zato je splošna rešitev homogene enačbe enaka

$$a_n = A \cdot 2^n + B \cos \frac{2n\pi}{3} + C \sin \frac{2n\pi}{3}.$$

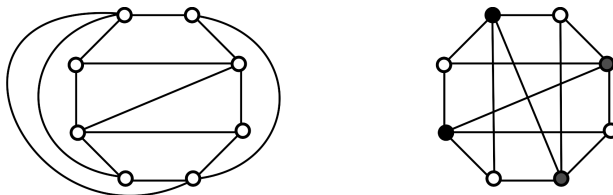
Konstante A, B, C izračunamo iz začetnih pogojev:

$$\begin{aligned} a_0 &= A + B = 1, \\ a_1 &= 2A - B/2 + C\sqrt{3}/2 = 1, \\ a_2 &= 4A - B/2 - C\sqrt{3}/2 = 2. \end{aligned}$$

Dobimo $A = 3/7$, $B = 4/7$ in $C = 2\sqrt{3}/7$. Rešitev gornje rekurzivne enačbe je torej enaka

$$a_n = \frac{3}{7} \cdot 2^n + \frac{4}{7} \cos \frac{2n\pi}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{7} \sin \frac{2n\pi}{3}.$$

4. (a) Graf je ravninski, saj ga v ravnino lahko narišemo tako, da se njegove povezave ne sekajo, glej spodnjo sliko.
- (b) Ker graf G vsebuje cikel dolžine 3, je njegova barvnost vsaj 3. Graf lahko pobarvamo s tremi barvami, glej spodnjo sliko, zato je njegova barvnost enaka 3.
- (c) Grafa G in $\overline{G}$ nista izomorfna. Ni se težko prepričati, da graf $\overline{G}$ vsebuje podgraf K_4 (vzamemo vsako drugo vozlišče), ki pa ga G ne vsebuje.



1. kolokvij, 27. november 2013

1. Vsoto 51 iz šestih destiških števk lahko sestavimo na tri načine:

$$51 = 3 \cdot 9 + 3 \cdot 8 = 4 \cdot 9 + 8 + 7 = 5 \cdot 9 + 6.$$

Ustrezne šestmestne številke dobimo tako, da izberemo mesta najprej za števke 8, 7, 6, na ostala mesta pa damo števko 9. Takšnih števil je torej

$$\binom{6}{3} + 6 \cdot 5 + 6 = 20 + 30 + 6 = 56.$$

2. (a) Nalogo rešimo s pomočjo porazdelitev. Elementi so knjige, škatle pa študenti. Imamo 13 elementov, ki jih razlikujemo, in 3 škatle, ki jih razlikujemo in morajo biti neprazne. Knjige lahko torej razdelimo med študente na $3!S(13, 3) = 6 \cdot 261625 = 1569750$ načinov.

- (b) Nalogo rešimo s pomočjo pravila vključitev in izključitev. Od rezultata iz točke (a) odštejemo število načinov, pri katerih kak študent dobi samo eno knjigo. Definirajmo torej množico A_i , $i = 1, 2, 3$, kot množico razdelitev, pri katerih študent i dobi natanko eno knjigo. Velja

$$|A_i| = 13 \cdot 2! S(12, 2) = 113 \cdot 2 \cdot 2047 = 53222.$$

Sklepamo takole: študentu i izberemo eno knjigo, nato pa preostalih dvanajst knjig delimo med dva študenta. Če dva študenta dobita vsak po eno knjigo, tretji študent dobi vse preostale knjige. Zato za $i \neq j$ velja

$$|A_i \cap A_j| = 13 \cdot 12 = 156.$$

Razdeliti moramo vse knjige, zato je $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$. Po pravilu vključitev in izključitev je število razdelitev knjig enako

$$1569750 - 3 \cdot 53222 + 3 \cdot 156 = 1410552.$$

Nalogo lahko rešimo tudi tako, da od števila vseh možnih razdelitev odštejemo število tistih, pri katerih kak študent dobi nič knjig ali eno knjigo. Definirajmo torej množico B_i , $i = 1, 2, 3$, kot množico razdelitev, pri katerih študent i dobi manj kot dve knjigi. Velja

$$|B_i| = 2^{13} + 13 \cdot 2^{12} = 61440.$$

Če dva študenta dobita vsak manj kot dve knjigi, se to lahko zgodi na štiri načine: oba dobita nič knjig, prvi dobi eno knjigo in drugi dobi nič knjig, drugi dobi eno knjigo in prvi dobi nič knjig ter oba dobita vsak po eno knjigo. Vse preostale knjige dobi tretji študent. Torej za $i \neq j$ velja

$$|B_i \cap B_j| = 1 + 13 + 13 + 13 \cdot 12 = 183.$$

Razdeliti moramo vse knjige, zato je $B_1 \cap B_2 \cap B_3 = \emptyset$. Vseh razdelitev 13 knjig med tri študente je 3^{13} . Po pravilu vključitev in izključitev je število razdelitev knjig enako

$$3^{13} - 3 \cdot 61440 + 3 \cdot 183 = 1410552.$$

3. Označimo štiri mesta s črkami A, B, C, D . Potovanje ustreza zaporedju dolžine 20, v katerem se vsaka od črk A, B, C, D pojavi po petkrat (isti kraj lahko trgovski potnik obišče dvakrat zapored).

- (a) Rešitev je $20!/(5! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 5!)$.
 (b) Na štiri načine se lahko odločimo, katero mesto bo na začetku in koncu. Za ostalih 18 obiskov spet ni omejitev. Imamo $4 \cdot 18!/(3! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 5!)$ načinov.
 (c) Mesti A, B štejemo za eno enoto; imamo samo tri znake, vsak se pojavi po petkrat. Pri vsakem od petih obiskov se moramo odločiti, ali najprej obiščemo A ali najprej obiščemo B ; vsakič imamo dve možnosti. Vseh možnosti je torej

$$\frac{15!}{5! \cdot 5! \cdot 5!} \cdot 2^5.$$

4. Elementi so elementi množice A ; imamo $n + 1$ elementov. Škatle so števila $1, \dots, n$; imamo n škatel. V škatlo i damo elemente $i, n + i$ in $2n + i$ za $i = 1, \dots, n$. Ker je škatel manj kot elementov, sta vsaj v eni škatli, na primer škatli i , vsaj dva elementa, dve različni števili iz množice A . To pa pomeni, da se razlikujeta za n ali za $2n -$ torej najmanj za n in največ za $2n$.

2. kolokvij, 21. januar 2014

1. (a) Označimo z $A(x)$ rodovno funkcijo zaporedja (a_n) in z $A_i(x)$ rodovno funkcijo za število razdelitev vsaj dveh bonbonov otroku i , kjer je $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Enemu otroku lahko damo $n \geq 2$ bonbonov na en sam način, zato je

$$A_i(x) = x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{x^2}{1 - x}$$

in

$$A(x) = A_1(x) \cdot A_2(x) \cdot A_3(x) \cdot A_4(x) \cdot A_5(x) = \frac{x^{10}}{(1 - x)^5}.$$

- (b) Uporabimo binomski izrek za negativne eksponente:

$$A(x) = x^{10}(1 - x)^{-5} = x^{10} \sum_{n \geq 0} \binom{5 + n - 1}{n} x^n.$$

Koeficient pred x^n je za $n \geq 10$ enak

$$\binom{5 + (n - 10) - 1}{n - 10} = \binom{n - 6}{n - 10} = \binom{n - 6}{4}.$$

Zato je

$$a_n = \begin{cases} 0 & ; \quad n < 10, \\ \binom{n-6}{4}; & n \geq 10. \end{cases}$$

- (c) Tako je $a_{30} = \binom{24}{4} = 10626$.

2. Izračunajmo prvih nekaj členov zaporedja (a_n) :

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 2 \cdot 2 + 2 = 6 \quad (\text{dve ploščici } 1 \times 1 \text{ ali ena ploščica } 1 \times 2)$$

$$a_3 = 2^3 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 = 19 \quad (\text{tri ploščice } 1 \times 1, \\ \text{ali ena ploščica } 1 \times 2 \text{ in ena ploščica } 1 \times 2 \text{ in obratno} \\ \text{ali ena ploščica } 1 \times 3).$$

Pokrivanje šahovnice lahko zaključimo na naslednje načine:

- z eno ploščico velikosti 1×1 (dveh barv),
- z eno ploščico velikosti 1×2 (dveh barv),
- z eno ploščico velikosti 1×3 (treh barv).

V prvem primeru najprej na vse možne načine pokrijemo šahovnico velikosti $1 \times (n-1)$, kar lahko storimo na a_{n-1} načinov, v drugem primeru najprej na vse možne načine pokrijemo šahovnico velikosti $1 \times (n-2)$, kar lahko storimo na a_{n-2} načinov in v tretjem primeru pa najprej na vse možne načine pokrijemo šahovnico velikosti $1 \times (n-3)$, kar lahko storimo na a_{n-3} načinov. Velja torej

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} + 3a_{n-3}.$$

Rekurzivno enačbo rešimo po standardnem postopku. Karakteristični polinom enačbe $K(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x^2 + x + 1)$ ima ničle $x_1 = 3$, $x_2 = (-1 + i\sqrt{3})/2$ in $x_3 = (-1 - i\sqrt{3})/2$. V polarnem zapisu je $x_2 = \cos(2\pi/3) + i \cdot \sin(2\pi/3)$. Zato je splošna rešitev homogene enačbe enaka

$$a_n = A \cdot 3^n + B \cos \frac{2n\pi}{3} + C \sin \frac{2n\pi}{3}.$$

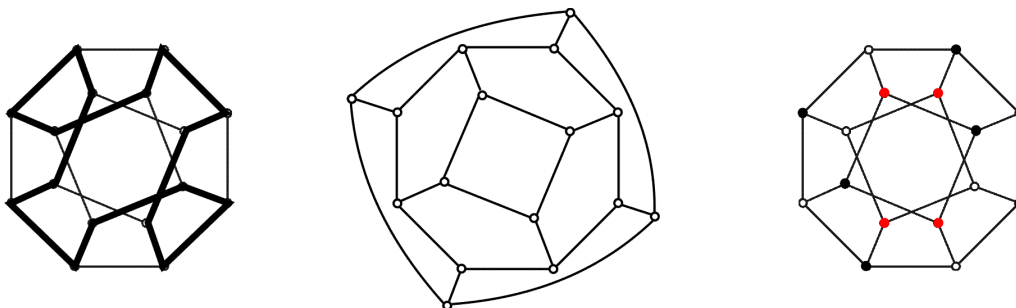
Konstante A, B, C izračunamo iz začetnih pogojev:

$$\begin{aligned} a_0 &= A + B = 1, \\ a_1 &= 3A - B/2 + C\sqrt{3}/2 = 1, \\ a_2 &= 9A - B/2 - C\sqrt{3}/2 = 2. \end{aligned}$$

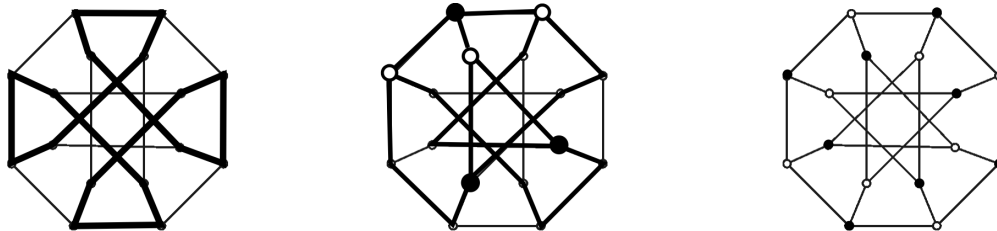
Dobimo $A = 9/13$, $B = 4/13$ in $C = 2\sqrt{3}/39$. Rešitev gornje rekurzivne enačbe je torej enaka

$$a_n = \frac{9}{13} \cdot 3^n + \frac{4}{13} \cos \frac{2n\pi}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{39} \sin \frac{2n\pi}{3}.$$

3. Prvi graf je Hamiltonov, saj ima Hamiltonov cikel, glej spodnjo sliko, na kateri so povezave iz Hamiltonovega cikla odebeljene. Graf je ravninski, saj ga lahko v ravnino narišemo tako, da se njegove povezave ne sekajo, glej sliko spodaj. Ker vsebuje trikotnik, potrebujemo vsaj tri barve. Na spodnji sliki so vozlišča grafa pobarvana s tremi barvami. Torej je njegova barvnost enaka 3.



Drugi graf je tudi Hamiltonov, na spodnji sliki so povezave iz Hamiltonovega cikla odebeljene. Graf ni ravninski, ker vsebuje subdivizijo grafa $K_{3,3}$, glej sliko spodaj.



Graf je dvodelen, zato je njegova barvnost enaka 2. Grafa nista izomorfna, saj imata različne lastnosti. Na primer, prvi je ravninski, drugi pa ne.

4. (a) Povezan graf na 7 vozliščih mora imeti vsaj 6 povezav; temu pogoju zadoščajo vsa drevesa. Po posledici Eulerjeve formule ima lahko največ $3 \cdot 7 - 6 = 15$ povezav. Tudi takšen graf obstaja (če ga narišemo v ravnino, so vsa njegova lica trikotniki).
- (b) Graf, ki ni ravninski, vsebuje subdivizijo grafov $K_{3,3}$, ali K_5 . Graf $K_{3,3}$ ima najmanj povezav med vsemi neravninskimi grafi, to je 9. Da dobimo povezan neravninski graf s 7 vozlišči, mu moramo dodati še eno vozlišče in povezavo in dobimo povezan neravninski graf z 10 povezavami. Najmanjše možno število povezav za ta primer je torej 10. Največje možno število povezav za graf na 7 vozliščih pa je $\binom{7}{2} = 21$, kolikor jih ima poln graf K_7 .
- (c) Lema o rokovanju nam pove, da je v tem primeru število povezav vsaj $3 \cdot 7/2$. Ker je število povezav celo, mora imeti povezan ravninski graf z minimalno stopnjo 3 vsaj 11 povezav. Največ pa ima lahko 15 povezav, tako kot v točki (a). Da takšni grafi res obstajajo, se prepričamo tako, da jih konstruiramo.

1. izpit, 7. februar 2014

1. (a) Za vsakega prijatelja lahko izberemo razglednico na 10 načinov. Skupaj je potem 10^5 načinov za pošiljanje razglednic petim prijateljem.
 - (b) Če želimo poslati različne razglednice, imamo za prvega prijatelja na voljo 10 razglednic, za drugega 9, za tretjega 8, za četrtega 7 in za petega 6 razglednic. Torej lahko pošljemo razglednice na $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$ načinov.
 - (c) Za vsakega prijatelja lahko izberemo dve razglednici na $\binom{10}{2} = 45$ načinov. Skupaj je potem $45^5 = 184528125$ načinov.
 - (d) Za vsakega prijatelja lahko izberemo med 1 in 10 razglednic na $2^{10} - 1$ načinov - toliko je vseh nepraznih podmnožic množice z 10 elementi. Skupaj je potem $(2^{10} - 1)^5 = 1023^5$ načinov.
2. Naloge se lotimo s pomočjo pravila vključitev in izključitev. Označimo z

A množico besed, pri katerih je "A" na 1. in 2. mestu, z

B množico besed, pri katerih je “b” na 3. mestu in s
 C množico besed, pri katerih je “C” na 4. in 5. mestu.

Iščemo $|A^C \cap B^C \cap C^C| = |U| - |A \cup B \cup C|$, kjer je U množica vseh besed. Izračunajmo

$$\begin{aligned} |U| &= \frac{7!}{2!2!3!} = 210, \\ |A| &= \frac{5!}{2!3!} = 10, \\ |B| &= \frac{6!}{2!1!3!} = 60, \\ |C| &= \frac{5!}{2!2!1!} = 30, \\ |A \cap B| &= \frac{4!}{1!3!} = 4, \\ |A \cap C| &= \frac{3!}{2!1!} = 3, \\ |B \cap C| &= \frac{4!}{2!1!1!} = 12, \\ |A \cap B \cap C| &= \frac{2!}{1!1!} = 2. \end{aligned}$$

Pri tem smo upoštevali, da sta pri nizih iz množice A dve mesti že določeni (na prvem in drugem mestu je znak “A”, določiti je treba še znake na petih mestih), pri nizih iz množice B je eno mesto že določeno (na tretjem mestu je znak “B”, določiti je treba še znake na šestih mestih), pri nizih iz množice C dve mesti že določeni (na četrtem in petem mestu je znak “C”, določiti je treba še znake na petih mestih) in tako naprej. Po pravilu vključitev in izključitev dobimo, da je število različnih nizov enako

$$210 - (10 + 60 + 30 - 4 - 3 - 12 + 2) = 127.$$

3. Zapišimo $A(x)$ kot vsoto formalnih potenčnih vrst. Pri tem uporabimo binomski izrek za negativne eksponente:

$$\begin{aligned} A(x) &= (x-3) \cdot \frac{1}{-3} \cdot \frac{1}{1-2x/3} + x \cdot \frac{1}{-8} \cdot \frac{1}{(1-x/2)^3} \\ &= -\frac{(x-3)}{3} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{2}{3}\right)^n x^n - \frac{x}{8} \cdot \sum_{n \geq 0} \binom{3+n-1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n x^n. \end{aligned}$$

Prvi člen zaporedja izračunamo posebej, $a_0 = 1$. Za $n \geq 1$ pa imamo

$$\begin{aligned} a_n &= -\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{1}{8} \binom{n+1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \left(-\frac{2}{3} + 1\right) - \frac{1}{8} \cdot \frac{(n+1)n}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - n(n+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}. \end{aligned}$$

Torej je

$$a_6 = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^5 - 6 \cdot 7 \left(\frac{1}{2}\right)^9 = -\frac{7117}{186624}.$$

4. Označimo vozlišča grafa C_n po vrsti s števili od 1 do n .

- (a) Stopnje vozlišč v ciklu C_n so 2. Torej so stopnje vozlišč v $\overline{C_n}$ enake $n - 1 - 2 = n - 3$. Po lemi o rokovanju je število povezav grafa $\overline{C_n}$ enako $n \cdot (n - 3)/2$.
- (b) Graf je Eulerjev, če je povezan in so stopnje vseh njegovih vozlišč sode. V našem primeru se to zgodi, če je n lih (potem je $n - 3$ sod) in je $n > 3$, saj $\overline{C_3}$ ni povezan.
- (c) Za $n = 3, 4$ je $\overline{C_n}$ dvodelen. Graf $\overline{C_5}$ je cikel dolžine 5, zato ni dvodelen. Za $n \geq 6$ graf $\overline{C_n}$ vsebuje trikotnik (vozlišča 1, 3, 5 so povezana med seboj), zato ni dvodelen.
- (d) Za $n = 3, 4, 5, 6$ grafa $\overline{C_n}$ ni težko narisati tako, da se njegove povezave ne sekajo. Graf $\overline{C_7}$ vsebuje subdivizijo grafa $K_{3,3}$ z vozlišči 1, 2, 3, 5, 7. Za $n \geq 8$ graf $\overline{C_n}$ vsebuje podgraf $K_{3,3}$ z vozlišči 1, 2, 3, 5, 6, 7.

2. izpit, 14. februar 2014

1. (a) Ločimo dve možnosti. Najprej za prvo mesto izberimo eno številko izmed 1, 3, 5. To lahko storimo na 3 načine. Za zadnje mesto izbiramo izmed štirih števk. Preostalih 8 števk razporedimo na mesta v sredini na $8!$ načinov. Če za prvo mesto izberemo številko 7 ali 9, nam zadnje mesto nam ostane 5 možnosti. Preostalih 8 števk razporedimo na mesta v sredini na $8!$ načinov. Skupaj je $3 \cdot 4 \cdot 8! + 2 \cdot 5 \cdot 8! = 887040$ permutacij, ki zadoščajo pogojem naloge.
- (b) Spet ločimo dve možnosti, glede na to, ali je številka 9 na prvem mestu ali ne. V prvem primeru preostale številke razporedimo na $9!$ načinov. V drugem primeru imamo za prvo mesto 8 možnosti, saj na prvo mesto ne smemo postaviti števk 0 in 9. Za zadnje mesto imamo še 8 možnosti, saj tja ne smemo postaviti številke, ki je na prvem mestu, in številke 9. Preostale številke razporedimo na sredinska mesta na $8!$ načinov. Skupaj imamo torej $9! + 8 \cdot 8 \cdot 8! = 2943369$ ustreznih permutacij.
2. Štiri vrste sokov izmed sedmih izberemo na $\binom{7}{4}$ načinov. Vsakemu od desetih gostov priredimo eno od štirih vrst sokov na $4! S(10, 4)$ načinov: štejemo surjektivne funkcije, ki slikajo iz množice z desetimi elementi v množico s štirimi elementi. Skupaj je torej $\binom{7}{4} \cdot 4! S(10, 4) = 28648200$ načinov za razdelitev sokov gostom.
3. Pri izračunu prvih členov zaporedja (a_n) upoštevamo, da prazna množica ustreza pogojem naloge, za $1 \leq n \leq 4$ samo še podmnožice moči ena ustrezajo pogojem naloge, za $n \geq 5$ pa tudi nekatere podmnožice moči dva ustrezajo pogojem naloge. Šele pri $n \geq 9$ imamo podmnožice moči tri in več. Dobimo $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$,

$a_3 = 4, a_4 = 5, a_5 = 7, a_6 = 10, a_7 = 14$. Podmnožice množice $\{1, \dots, n\}$ lahko ne vsebujejo n ; takšnih je a_{n-1} . Če pa vsebujejo n , ne vsebujejo $n-1, n-2$ in $n-3$, zato jih je samo a_{n-4} . Podmnožic množice $\{1, \dots, n\}$, pri katerih se poljubna dva elementa razlikujeta vsaj za 4, je zato $a_{n-1} + a_{n-4}$. Rekurzivna zveza se torej glasi

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-4}.$$

Označimo z $A(x)$ rodovno funkcijo zaporedja (a_n) . Iz rekurzivne enačbe dobimo rodovno funkcijo na naslednji način: rekurzivno enačbo pomnožimo z x^n in sestavimo formalne vsote členov za $n \geq 4$. Dobimo

$$\sum_{n \geq 4} a_n x^n = \sum_{n \geq 4} a_{n-1} x^n + \sum_{n \geq 4} a_{n-4} x^n.$$

Prva vsota je enaka $A(x) - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)$, druga vsota je enaka $x(A(x) - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2))$, tretja vsota pa je enaka $x^4 A(x)$. Dobimo linerno enačbo za $A(x)$, ki se glasi $A(x)(1 - x - x^4) = 1 + x + x^2 + x^3$ in izrazimo

$$A(x) = \frac{1 + x + x^2 + x^3}{1 - x - x^4}.$$

4. Graf G je Hamiltonov, saj ima Hamiltonov cikel, na primer 1, 2, 3, 4, 5, 10, 8, 7, 9, 6, 1. Graf G ni ravninski, ker vsebuje subdivizijo grafa $K_{3,3}$; za črna vozlišča lahko vzamemo vozlišča 5, 6, 7, za bela vozlišča pa vozlišča 1, 9, 10. Barvnost grafa G je enaka tri. Potrebujemo najmanj tri barve, ker graf vsebuje cikle lihe dolžine, eden od njih je na primer cikel dolžine pet 1, 2, 3, 4, 5, 1. Grafa ni težko pobarvati s tremi barvami, zato je njegova barvnost enaka tri.

Graf H je Hamiltonov, saj ima Hamiltonov cikel, na primer 1, 5, 4, 3, 2, 6, 10, 9, 8, 7, 1. Graf H ni ravninski, ker vsebuje subdivizijo grafa $K_{3,3}$; za črna vozlišča lahko vzamemo vozlišča 2, 7, 10, za bela vozlišča pa vozlišča 1, 6, 9. Barvnost grafa H je enaka tri. Potrebujemo najmanj tri barve, ker graf vsebuje cikle lihe dolžine, eden od njih je na primer cikel dolžine pet 1, 2, 3, 4, 5, 1. Grafa ni težko pobarvati s tremi barvami, zato je njegova barvnost enaka tri.

Grafa G in H nista izomorfna, saj ima prvi dva cikla dolžine štiri (1, 5, 10, 6, 1 in 2, 3, 8, 7, 2) drugi pa tri cikle dolžine štiri (1, 2, 6, 7, 1 in 3, 4, 9, 8, 3 in 4, 5, 10, 9, 4).

3. izpit, 26. avgust 2014

1. Postavimo v vrsto najprej 3 rdeče kroglice in za njimi še 4 modre kroglice. Sedaj lahko postavimo zelene kroglice na 8 različnih mest - pred prvo rdečo kroglico, za zadnjo rdečo kroglico in med poljubni dve kroglici vmes. Več zelenih kroglic lahko postavimo tudi na isto mesto. Pet mest za zelene kroglice lahko torej izberemo na

$$\binom{8+5-1}{5} = 792$$

načinov. Če kroglic iste barve ne ločimo, jih lahko torej razvrstimo na 792 načinov. Če kroglice med sabo razlikujemo, je potrebno to število pomnožiti še z vsemi vrstnimi redi rdečih, modrih in zelenih kroglic. Imamo torej

$$792 \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5! = 13685760$$

ustreznih razvrstitev.

2. Nalogo bomo rešili s pomočjo načela vključitev in izključitev.

- (a) Označimo z A_i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, množico izborov osmih kart, pri katerih barva i ni zastopana. Iščemo $|A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C| = |U| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$, kjer je U množica vseh izborov osmih kart. Izračunamo

$$\begin{aligned} |U| &= \binom{52}{8} = 752538150, \\ |A_i| &= \binom{39}{8} = 61523748, \\ |A_i \cap A_j| &= \binom{26}{8} = 1562275, \quad i \neq j, \\ |A_i \cap A_j \cap A_k| &= \binom{13}{8} = 1287, \quad i, j, k \text{ različni.} \end{aligned}$$

Presek vseh štirih množic je prazen. Če so zastopane vse barve, imamo

$$\binom{52}{8} - \binom{4}{1} \binom{39}{8} + \binom{4}{2} \binom{26}{8} - \binom{4}{3} \binom{13}{8} = 515811660$$

načinov za izbor osmih kart.

- (b) Sklepamo podobno kot prej, le da najprej izberemo tri barve izmed štirih in nato izbiramo izmed 39 kart teh barv. Dobimo

$$\binom{4}{3} \left(\binom{39}{8} - \binom{3}{1} \binom{26}{8} + \binom{3}{2} \binom{13}{8} \right) = 227363136$$

načinov za izbor osmih kart natanko treh barv.

3. Označimo z a_n število razdelitev n piškotov med tri študente in tri študentke, pri katerih vsak študent dobi med 3 in 10 piškotov, vsaka študentka pa med 5 in 12 piškotov. Označimo z $A(x)$ rodovno funkcijo zaporedja (a_n) . Rodovna funkcija za delitev piškotov samo enemu študentu je enaka $x^3 + \dots + x^{10}$, saj so samo koeficienti pri $x^3, x^4, \dots, x^{10}$ neničelni. Podobno je rodovna funkcija za delitev piškotov samo eni študentki enaka $x^5 + \dots + x^{12}$. Rodovna funkcija $A(x)$ je produkt rodovnih funkcij za posamezne študente in študentke. Dobimo

$$A(x) = (x^3 + \dots + x^{10})^3 (x^5 + \dots + x^{12})^3 = x^{24} (1 + x + x^2 + \dots + x^7)^6 = x^{24} \frac{(1 - x^8)^6}{(1 - x)^6}.$$

Zanima nas, koliko je a_{34} . Direktno ali s pomočjo binomskega izreka za negativne eksponente izračunamo $a_{34} = 2877$.

4. Graf G je Hamiltonov, saj ima Hamiltonov cikel, na primer $1, 5, 4, 3, 2, 6, 7, 8, 1$. Graf G je ravninski - ni ga težko narisati v ravnino tako, da se njegove povezave ne sekajo. Barvnost grafa G je enaka tri. Potrebujemo najmanj tri barve, ker graf vsebuje trikotnike, eden od njih je na primer $1, 5, 6$. Grafa ni težko pobarvati s tremi barvami, zato je njegova barvnost enaka tri.

Graf H je Hamiltonov, saj ima Hamiltonov cikel, na primer $1, 2, 4, 5, 6, 7, 3, 8, 1$. Graf H je ravninski - ni ga težko narisati v ravnino tako, da se njegove povezave ne sekajo. Barvnost grafa G je enaka štiri. To pokažemo takole. Recimo, da bi bila njegova barvnost enaka tri. Potem pobarvamo trikotnika $1, 2, 3$ in $1, 2, 8$ s tremi barvami v bistvu na en sam način, ker imata skupno stranico. Pri tem imata vozlišči 2 in 3 isto barvo. V trikotniku $5, 6, 7$ ima lahko le vozlišče 6 isto barvo kot 2 in 3 . Tudi vozlišče 4 je vsebovano v trikotniku skupaj z vozliščema 5 in 7 , torej mora biti iste barve kot 6 in zato tudi iste barve kot 2 . Vendar pa je sosednje z vozliščem 2 in zato rabimo četrto barvo. Grafa H sedaj ni težko pobarvati s štirimi barvami in zato je njegova barvnost enaka štiri.

Grafa G in H nista izomorfna, saj ima prvi barvnost tri, drugi pa štiri.